Univerzitet u Zenici
Pedagoški fakultet
Matematika i informatika

Sadržaj sveske sa vježbi iz predmeta Euklidska geometrija 1

(akademska 2011/2012.)

Literatura i korisne zbirke su:

- R. Tošić, V. Petrović, Problemi iz geometrije (-Metodička zbirka zadataka-), Stylos
- M. Prvanović, Osnovi geometrije, Građevinska knjiga
- N. V. Jefimov, Viša geometrija, Naučna knjiga
- H. Meschkowski, Temelji euklidske geometrije, Školska knjiga
- R. Hartshorne, Euclid and beyond, Springer

Sveska je skunuta sa stranice
pf.unz.ba\nabokov

Za uočene greške, kritike i mane pisati na
infoarrt@gmail.com

Osnovni konstruktivni zadaci u radu

Uvod

Svaki konstruktivni zadatak ima četri dijela:
1. Analiza
2. Konstrukcija
3. Dokaz
4. Diskusija

U analizi pretpostavimo da je zadatak riješen, i na osnovu tog rješenja, logičkim razmišljanjem i po potrebi dodavanjem nekih novih elemenata slici, dolazimo do ideje šta možemo konstruisati od datih elemenata u zadatku.

U konstrukciji pravimo niz od jasnih i nedvosmislenih koraka šta i kojim redom trebamo konstruisati da bismo od datih elemenata u zadatku došli do rješenja. Konstrukciju možemo tumačiti i kao Algoritam u kome su ulaz dati elementi zadatka a izlaz rješenja zadatkea.

U dokazu dokazujemo one tvrdnje na koje smo se pozvali u Analizi a koje nisu dokazane.

U diskusiji (determinizaciji) razmatramo broj rješenja

Pri rješavanju konstruktivnih zadataka polazimo od nekih zadataka koje ne svodimo na proste. To su:
1. konstruisati pravu koja prolazi kroz dvije date tačke.
2. konstruisati kružnicu kojoj su date centar i poluprečnik
3. konstruisati presječnu tačku dvije date prave
4. konstruisati presječnu tačku date prave i date kružnice
5. konstruisati presječnu tačku dvije date kružnice
6. konstruisati proizvoljnu pravu, proizvoljnu kružnicu, proizvoljnu tačku koja pripada ili ne pripada datoj pravoj ili datoj kružnici.

Prenošenje duži. Konstrukcija simetrale duži i simetrale ugla. Prenošenje uglova.

Urađeni zadaci

1. Na datoj pravoj a, sa date strane tačke A konstruisati tačku B, tako da duž AB bude jednaka datoj duži d.
2. Konstruisati duž jednaku zbiru dvije date duži d_1 i d_2.
3. Konstruisati duž koja je jednaka razlici dvije date duži d_1 i d_2 $(d_1>d_2)$.
4. U datoj tački date prave konstruisati normalu na tu pravu.
5. Kroz datu tačku koja ne pripada datoj pravoj konstruisati normalu na datu pravu.
6. Konstruisati pravu koja prolazi kroz sredinu date duži i okomita je na tu duž.
7. Konstruisati simetralu datog ugla.
8. Iz početka date poluprave u datoj ravni konstruisati polupravu koja sa datom polupravom zaklapa ugao jednak datom uglu.
9. Konstruisati ugao jednak zbiru dva data ugla.

Konstrukcije trouglova kod kojih su poznati SUS, USU, SSS, UUS i SSU

Urađeni zadaci

10. Konstruisati trougao kome su dvije stranice jednake dvijema datim dužima a ugao između njih jednak datom uglu.
11. Konstruisati trougao u kome je jedna stranica jednaka datoj duži a dva ugla nalegla na tu stranicu su jednaka dvoma datim uglovima.
12. Konstruisati trougao čije su tri stranice jednake trima datim dužima
13. Konstruisati trougao u kome je jedna stranica jednaka datoj duži, jedan ugao nalegao na tu stranicu jednak datom uglu i ugao nasprem te stranice jednak drugom datom uglu.
14. Konstruisati trougao kome su dvije date stranice jednake dvijema datim dužima, a ugao nasprem jedne od stranica jednak datom uglu.

Konstrukcija paralelnih pravih

Urađeni zadaci

15. Kroz datu tačku van date prave konstruisati pravu paralelnu toj pravoj.
16. Konstruisati pravu koja prolazi kroz datu tačku (koja se nalazi van date prave) i koja siječe datu pravu pod datim uglom.

Razni konstruktivni zadaci

Urađeni zadaci

17. Date su tačke A, B i C koje ne pripadaju istoj pravoj. Konstruisati međusobno paralelne prave a, b i c kroz tačke A, B i C redom tako da su rastojanja između susjednih pravih podudarna.
18. Konstruisati pravougli trougao ako su date jedna njegova kateta i težišna linija koja odgovara hipotenuzi.
19. Na kraku x ugla $\measuredangle xOy$ data je tačka A. Konstruisati na kraku y tačku B, tako da je $\measuredangle OAB = 3\measuredangle OBA$.
20. Konstruisati pravougli trougao ako su date jedna njegova kateta i težišna linija koja odgovara datoj kateti.
21. Konstruisati pravougli trougao ako su date jedna njegova kateta i težišna linija koja odgovara drugoj kateti.
22. Konstruisati kružnicu kroz tri date tačke.
23. Konstruisati kružnicu koja dodiruje tri date prave.

Problemi broj 1

Zadaci za vježbu

24. Konstruisati duž koja je jednaka razlici dvije date duži d_1 i d_2.

25. Kroz datu tačku koja ne pripada datoj pravoj konstruisati normalu na datu pravu. Zatim datu duž prenijeti na datu pravu tako da presjek date prave i konstruisane normale pripada sredini date duži.

26. Konstruisati ugao od 45°.

27. Konstruisati ugao jednak razlici dva data ugla.

28. Ako su data dva ugla trougla konstruisati treći ugao tog trougla.

29. Dat je jedan oštar ugao pravouglog trougla. Konstruisati drugi oštar ugao tog trougla.

30. Konstruisati ugao pri vrhu jednakokrakog trougla ako je dat ugao na osnovici.

31. Konstruisati ugao na osnovici jednakokrakog trougla ako je dat ugao pri vrhu.

32. Konstruisati jednakokraki trougao ako su mu dati krak i ugao pri vrhu.

33. Konstruisati pravougli trougao ako su mu zadane katete.

34. Konstruisati jednakokraki trougao ako su dati njegova osnovica i ugao na osnovici.

35. Konstruisati pravougli trougao ako su dati njegova kateta i ugao nalegao na tu katetu.

36. Konstruisati jednakokraki trougao kome su dati osnovica i krak.

37. Konstruisati jednakostranični trougao ako mu je data jedna stranica.

38. Konstruisati uglove od 30°, 60°, 120° i 150°.

39. Konstruisati pravougli trougao kome je data hipotenuza i jedan oštar ugao.

40. Konstruisati jednakokraki trougao kome je data osnovica i ugao pri vrhu.

42. Konstruisati jednakokraki trougao ako mu je dat krak i ugao na osnovici.

43. Konstruisati pravougli trougao ako su mu dati kateta i hipotenuza.

44. Konstruisati pravu koja se nalazi na datom rastojanju od date prave.

45. Kroz dvije date tačke M i N konstruisati dvije paralelne prave.

(Ova stranica je ostavljena prazna)

OSNOVNI KONSTRUKTIVNI ZADACI U RADU

Uvod

Svaki konstruktivni zadatak ima četri dijela:

1. Analiza
2. Konstrukcija
3. Dokaz
4. Diskusija

U Analizi pretpostavimo da je zadatak riješen, i na osnovu tog rješenja, logičkim razmišljanjem i po potrebi dodavanjem nekih novih elemenata slici, dolazimo do ideje šta možemo konstruisati od datih elemenata u zadatku.

U Konstrukciji pravimo niz od jasnih i nedvosmislenih koraka šta i kojim redom trebamo konstruisati da bismo od datih elemenata u zadatku došli do rješenja. Konstrukciju možemo tumačiti i kao Algoritam u kome su ulaz dati elementi zadatka a izlaz rješenje zadatka.

U Dokazu dokazujemo one tvrdnje na koje smo se pozvali u Analizi a koje nisu dokazane.

U Diskusiji razmatramo broj rješenja.

Pri rješavanju konstruktivnih zadataka polazimo od nekih zadataka koje ne svodimo na proste. To su:

1. konstruisati pravu koja prolazi kroz dvije date tačke.
2. konstruisati kružnicu kojoj su dati centar i poluprečnik
3. konstruisati presječnu tačku dvije date prave
4. konstruisati presječnu tačku date prave i date kružnice
5. konstruisati presječnu tačku dvije date kružnice
6. konstruisati proizvoljnu pravu, proizvoljnu kružnicu, proizvoljnu tačku koja pripada ili ne pripada datoj pravoj ili datoj kružnici.

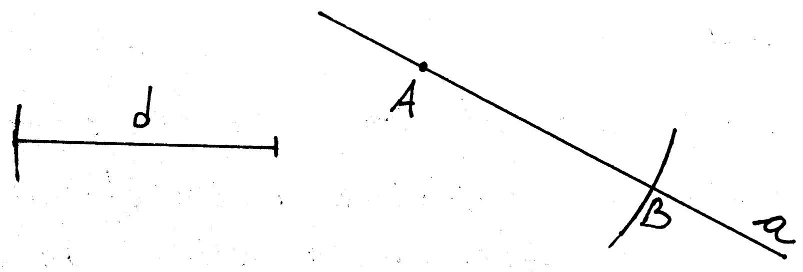
Prenošenje duži. Konstrukcija simetrale duži i simetrale ugla. Prenošenje uglova.

Zbog lakoće zadataka koji slijede preskočit ćemo neke od koraka (Analizu, Konstrukciju, Dokaz ili Diskusiju).

(1.) Na datoj pravoj a, sa date strane tačke A konstruisati tačku B, tako da duž AB bude jednaka datoj duži d.

Rj:
Konstrukcija

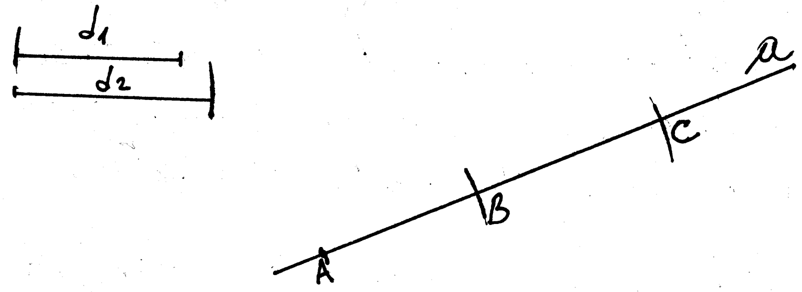
1. a, $A \in a$, d
2. $k(A, d) \cap a = \{B\}$
3. $AB = d$



(2.) Konstruisati duž jednaku zbiru dvije date duži d_1 i d_2.

Rj:
Konstrukcija

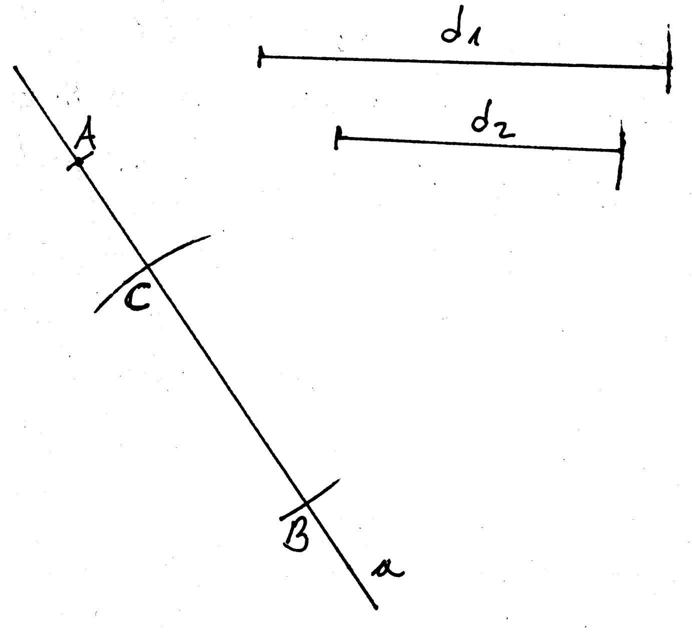
1. a, $A \in a$, d_1, d_2
2. $k(A, d_1) \cap a = \{B\}$
3. $k(B, d_2) \cap a = \{C\}$: $A-B-C$
4. $AC = d_1 + d_2$



(3.) Konstruisati duž koja je jednaka razlici dvije date duži d_1 i d_2 ($d_1 > d_2$).

Rj:
Konstrukcija

1. a, $A \in a$, d_1, d_2, $d_1 > d_2$
2. $k(A, d_1) \cap a = \{B\}$
3. $k(B, d_2) \cap a = \{C\}$: $A-C-B$
4. $AC = d_1 - d_2$

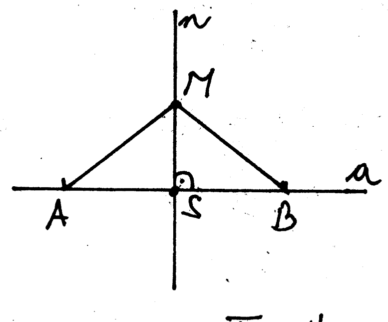


Prava s je simetrala duži AB ako ona sadrži središte S duži AB i normalna je na pravu $p(A,B)$.

4. U datoj tački date prave konstruisati normalu na tu pravu.

Rj. <u>Analiza</u>

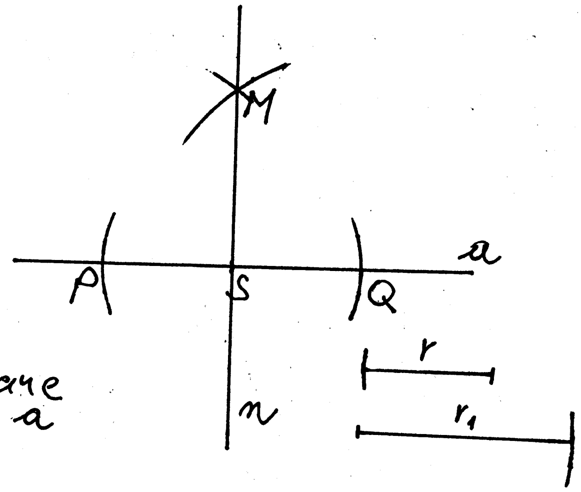
Pretpostavimo da je zadatak riješen. Neka je data prava a, $S \in a$, $n \perp a$ i $n \cap a = \{S\}$.



Neka su A i B tačke na pravoj a takve da je $A-S-B$ i $AS \cong BS$. Primjetimo da za proizvoljnu tačku M, $M \in n$ važi $AM \cong BM$ (zbog pravila SUS). Tačku M možemo konstruisati, a poslije toga i pravu $n = p(M,S)$.

<u>Konstrukcija</u>

1. a, $S \in a$
2. dužinu r i r_1, $r_1 > r$
3. $k(S,r) \cap a = \{P,Q\}$: $P-S-Q$
4. $k(P,r_1) \cap k(Q,r_1) = \{M\}$ sa jedne strane prave a
5. $n = p(S,M)$



<u>Dokaz</u>

Koristićemo oznake iz konstrukcije.
Da prava n sadrži tačku S slijedi iz konstrukcije.
Trebamo dokazati da je $n \perp a$.
Prema konstrukciji

$$\left.\begin{array}{l} PS \cong QS \\ MS \cong MS \\ PM \cong QM \end{array}\right\} \overset{SSS}{\Longrightarrow} \triangle PSM \cong \triangle MSQ$$

$$\Downarrow$$

$$\sphericalangle PSM \cong \sphericalangle MSQ \quad \ldots (*)$$

Kako je $\sphericalangle PSM + \sphericalangle MSQ = 180^\circ$ i $(*)$ $\Rightarrow$ $\sphericalangle PSM = \sphericalangle MSQ = 90^\circ$,
tj. $p(M,S) \perp a$ $\Rightarrow$ $n \perp a$

<u>Diskusija</u>

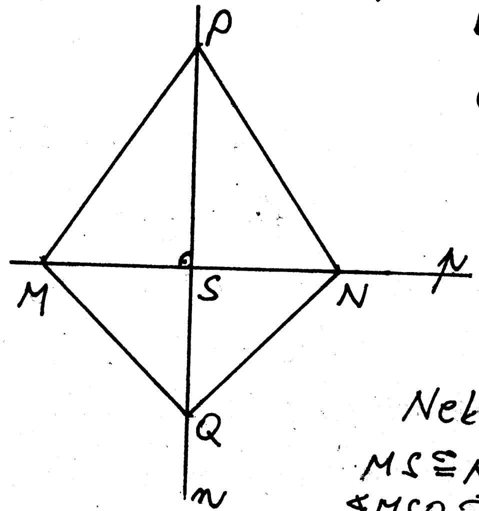
Vidjeli smo da zadatak ima bar jedno rješenje. Jedinstvenost rješenja slijedi iz jedinstvenosti normale na datu pravu u datoj tački.

(5.) Kroz datu tačku koja ne pripada datoj pravoj konstruisati normalu na datu pravu.

Rj:

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen. Neka je n tražena prava, koja je $n \perp p$, i neka je $P \notin p$ data tačka. Označimo sa $\{S\} = p \cap n$. Naka su M i N tačke takve da je $MS = NS$. Primjetimo:



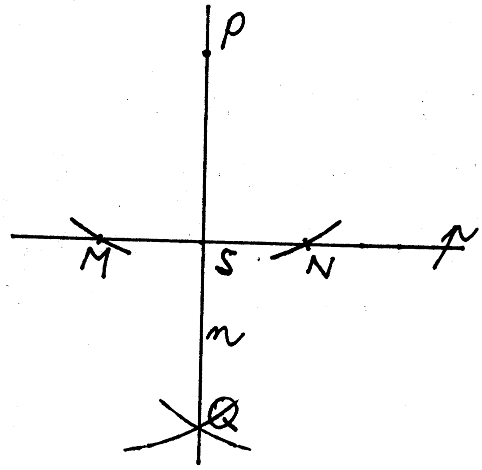
$$\left.\begin{array}{c} MS \cong NS \\ \sphericalangle MSP \cong \sphericalangle NSP = 90^\circ \\ PS \cong PS \end{array}\right\} \xRightarrow{SUS} \begin{array}{c} \Delta MSP \cong \Delta NSP \\ \Downarrow \\ PM \cong NP \end{array}$$

Neka je Q proizvoljna tačka, $Q \in n$.

$$\left.\begin{array}{c} MS \cong NS \\ \sphericalangle MSQ \cong \sphericalangle NSQ \\ QS \cong QS \end{array}\right\} \xRightarrow{SUS} \begin{array}{c} \Delta MSQ \cong \Delta NSQ \\ \Downarrow \\ MQ \cong NQ \end{array}$$

Kako je $MP \cong NP$ i $MQ \cong NQ$ to možemo konstruisati pravu $n = p(P,Q)$.

Konstrukcija



1. p, $P \notin p$,
2. r
3. $k(P, r) \cap p = \{M, N\}$
4. $k(M, r) \cap k(N, r) = \{P, Q\}$
5. $n = p(P, Q)$

Dokaz

Na osnovu konstrukcije imamo da je $P \in n$. Dokažimo da je $n \perp p$. $\{S\} = n \cap p$. Na osnovu konstrukcije:

$$\left.\begin{array}{c} PM \cong PN = r \\ MQ \cong NQ = r \\ PQ \cong PQ \end{array}\right\} \xRightarrow{SSS} \begin{array}{c} \Delta PMQ \cong \Delta PNQ \\ \Downarrow \\ \sphericalangle MPQ \cong \sphericalangle NPQ \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{c} MP \cong NP \\ \sphericalangle MPS \cong \sphericalangle NPS \\ PS \cong PS \end{array}\right\} \xRightarrow{SUS} \begin{array}{c} \Delta MPS \cong \Delta NPS \\ \Downarrow \\ \sphericalangle MSP \cong \sphericalangle NSP \\ \Downarrow (\text{kako je } \sphericalangle MSN = 180^\circ) \\ p \perp n \end{array}$$

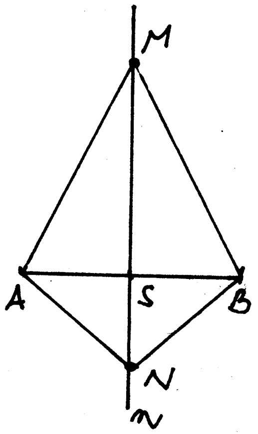
Diskusija

Vidjeli smo da zadatak ima bar jedno rješenje. Jedinstvenost rješenja slijedi iz jedinstvenosti normale na datu pravu u datoj tački.

6. Konstruisati pravu koja prolazi kroz sredinu date duži i okomita je na tu duž.

Rj: Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen. Neka je n tražena prava koja prolazi kroz sredinu S date duži AB. Neka je M proizvoljna tačka na pravoj n.



$$\left.\begin{array}{c} AS \cong BS \\ \sphericalangle ASM \cong \sphericalangle BSM = 90^\circ \\ MS \cong MS \end{array}\right\} \overset{SUS}{\Longrightarrow} \Delta ASM \cong \Delta BSM \Downarrow AM \cong BM$$

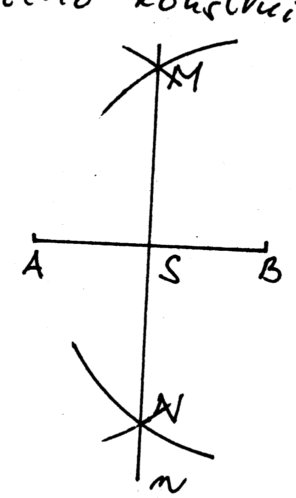
Neka je N proizvoljna tačka $N \in n$ i $M-S-N$

$$\left.\begin{array}{c} AS \cong BS \\ \sphericalangle ASN \cong \sphericalangle BSN = 90^\circ \\ NS \cong NS \end{array}\right\} \overset{SUS}{\Longrightarrow} \Delta ASN \cong \Delta BSN \Downarrow AN \cong BN$$

Kako je $AN \cong BN$ i $AM \cong BM$ to možemo konstruisati pravu $n = p(M,N)$.

Konstrukcija

1. AB
2. r
3. $k(A,r) \cap k(B,r) = \{M,N\}$
4. $n = p(M,N)$



Dokaz

Dokažimo da je n okomita na duž AB i da prolazi kroz sredinu duži AB.

$$\left.\begin{array}{c} AM \cong BM \\ AN \cong BN \\ MN \cong MN \end{array}\right\} \overset{SSS}{\Longrightarrow} \Delta AMN \cong \Delta BMN \Downarrow \sphericalangle AMN \cong \sphericalangle BMN$$

$$\{S\} = AB \cap n$$

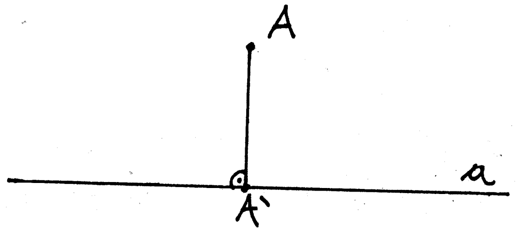
$$\left.\begin{array}{c} AM \cong BM \\ \sphericalangle AMS \cong \sphericalangle BMS \\ MS \cong MS \end{array}\right\} \overset{SUS}{\Longrightarrow} \Delta AMS \cong \Delta BMS \Downarrow AS \cong BS \text{ i } \sphericalangle ASM \cong \sphericalangle BSM$$

Prava n prolazi kroz sredinu duži AB i kako je $\sphericalangle ASM + \sphericalangle BSM = 180^\circ$ to $\sphericalangle ASM \cong \sphericalangle BSM = 90$ pa $n \perp AB$.

Diskusija

Zadatak ima bar jedno rješenje. Jedinstvenost rješenja slijedi iz jedinstvenosti normale na datu duž.

Simetrala ugla je prava koja dijeli ugao na dva jednaka dijela.

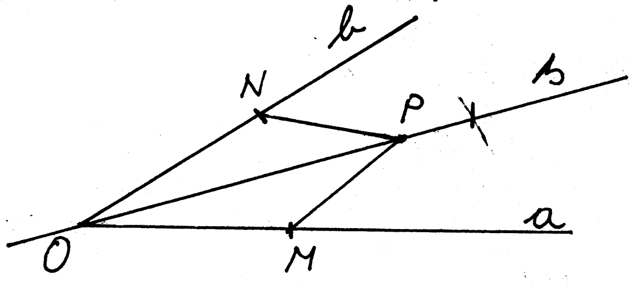


Ortogonalna projekcija tačke A na pravu a je tačka $A`$ takva da je $A` \in a$ i $p(A, A') \perp a$.

(7.) Konstruisati simetralu datog ugla.

Rj. Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen. Neka je prava s simetrala datog ugla $\measuredangle aOb$.



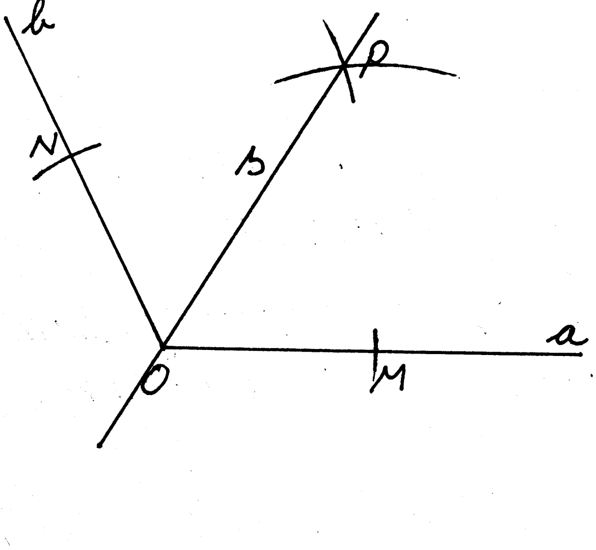
Neka su $M \in a$ i $N \in b$ proizvoljne tačke takve da je $MO \cong NO$ i neka je P proizvoljna tačka na simetrali s. Imamo:

$$\left.\begin{array}{l} OM \cong ON \\ \measuredangle MOP \cong \measuredangle NOP \\ OP \cong OP \end{array}\right\} \xRightarrow{SUS} \triangle OMP \cong \triangle ONP \Downarrow MP \cong NP$$

Kako je $OM \cong ON$ i $MP \cong NP$ to to simetralu $s = p(O, P)$ možemo konstruisati.

Konstrukcija

1. $\measuredangle aOb$
2. duž r
3. $k(O, r) \cap a = \{M\}$
4. $k(O, r) \cap b = \{N\}$
5. $k(M, r) \cap k(N, r) = \{P\}$
6. $s = p(O, P)$



Dokaz

Treba dokazati da je s simetrala ugla. Prema konstrukciji:

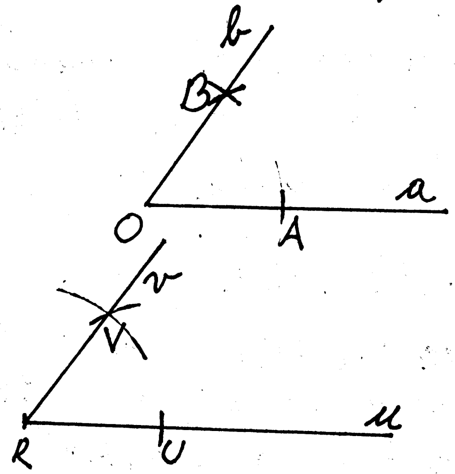
$$\left.\begin{array}{l} OM \cong ON \\ NP \cong MP \\ OP \cong OP \end{array}\right\} \xRightarrow{SSS} \triangle OPN \cong \triangle OPM \Downarrow \measuredangle NOP \cong \measuredangle MOP \Rightarrow s \text{ simetrala } \measuredangle aOb$$

Diskusija

Zadatak uvijek ima jedinstveno rješenje.

8. Iz početka date poluprave u datoj ravni konstruisati polupravu koja sa datom polupravom zaklapa ugao jednak datom uglu.

Rj.



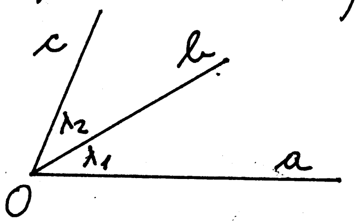
Konstrukcija

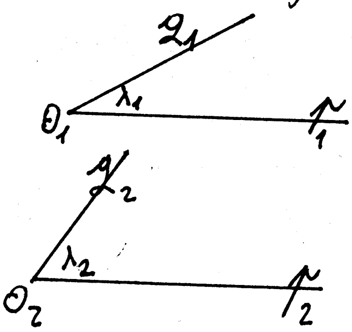
1. $\measuredangle aOb$, pp u sa početnom tačkom R
2. duž r
3. $k(O,r) \cap a = \{A\}$
4. $k(O,r) \cap b = \{B\}$
5. $k(R,r) \cap u = \{U\}$
6. $k(R,r) \cap k(U,AB) = \{V\}$
7. $v = pp[R,V)$

9. Konstruisati ugao jednak zbiru dva data ugla.

Rj. Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen. Neka je $\measuredangle aOc$ traženi ugao koji je jednak zbiru uglova $\measuredangle p_1O_1q_1$ i $\measuredangle p_2O_2q_2$. Neka je b poluprava takva da je $\measuredangle aOb = \measuredangle p_1O_1q_1$ i $\measuredangle bOc = \measuredangle p_2O_2q_2$.

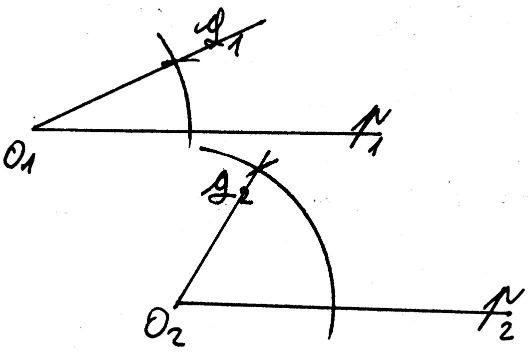


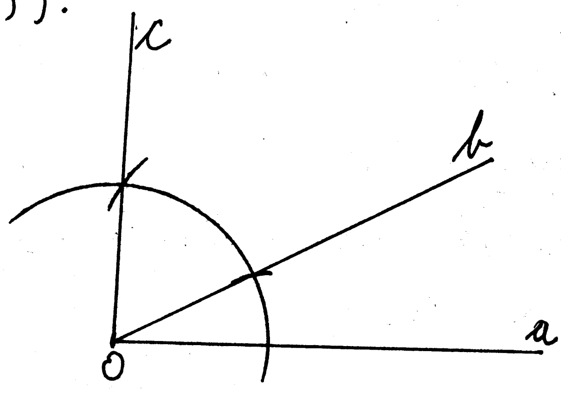


Sad, prema prethodnom zadatku, nije teško konstruisati $\measuredangle aOc$.

Konstrukcija

1. $\measuredangle p_1O_1q_1$, $\measuredangle p_2O_2q_2$, pp a sa početnom tačkom O
2. pp b: $\measuredangle aOb = \measuredangle p_1O_1q_1$
3. pp c: $\measuredangle bOc = \measuredangle p_2O_2q_2$ tako da c ne pripada poluravni sa ivicom u pravoj b koja sadrži a ($c \notin pr[p(b), a)$).



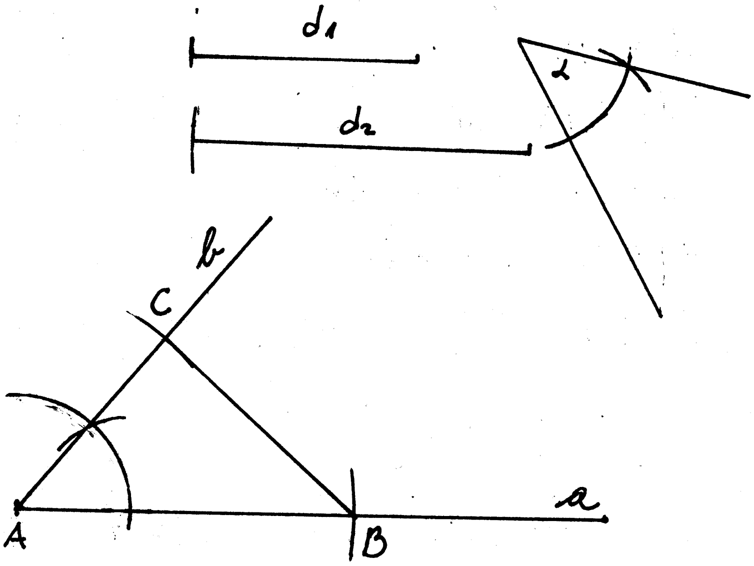


Konstrukcije trouglova kod kojih su poznati SUS, USU, SSS, UUS i SSU

1. Konstruisati trougao kome su dvije stranice jednake dvjema datim dužima a ugao između njih jednak datom uglu.

Rj.

Konstrukcija

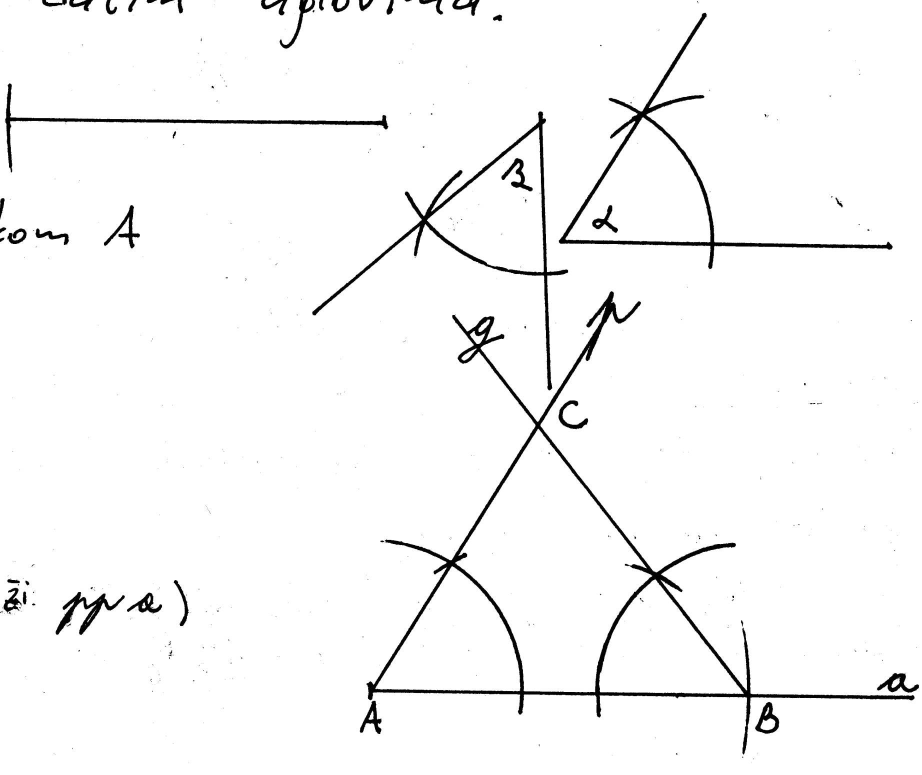


1. d_1, d_2, α
2. pp a sa početnom tačkom A
3. $k(A, d_2) \cap a = \{B\}$
4. pp b: $\angle BAb = \alpha$
5. $k(A, d_1) \cap b = \{C\}$
6. $\triangle ABC$

2. Konstruisati trougao u kome je jedna stranica jednaka datoj duži a dva ugla nalegla na tu stranicu su jednaka dvoma datim uglovima.

Rj.

Konstrukcija



1. d, α, β
2. pp a sa početnom tačkom A
3. $k(A, d) \cap a = \{B\}$
4. pp p: $\angle BAp = \alpha$
5. pp g: $\angle ABg = \beta$

   i $g \in pr[a', p)$

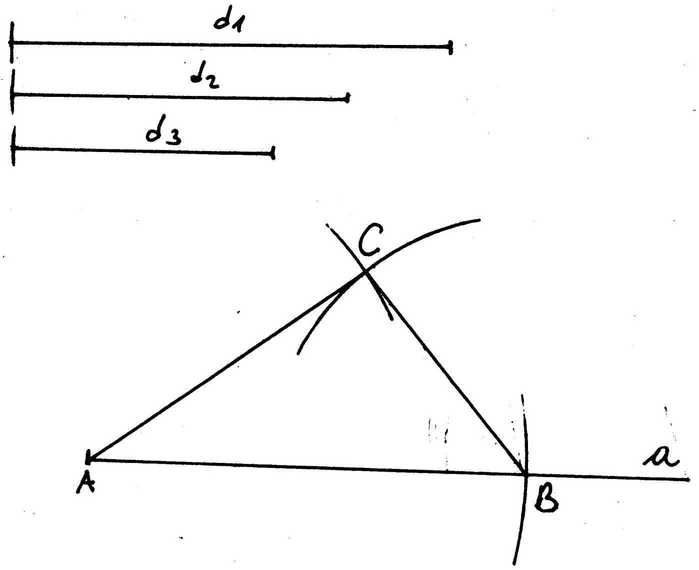
   (a' je prava koja ~~sadrži~~ pp a)
6. $p \cap g = \{C\}$
7. $\triangle ABC$

Diskusija

Zadatak ima jedinstveno rješenje ako i samo ako je $\alpha + \beta < 180°$.

3. Konstruisati trougao čije su tri stranice jednake trima datim dužima.

R:



Konstrukcija

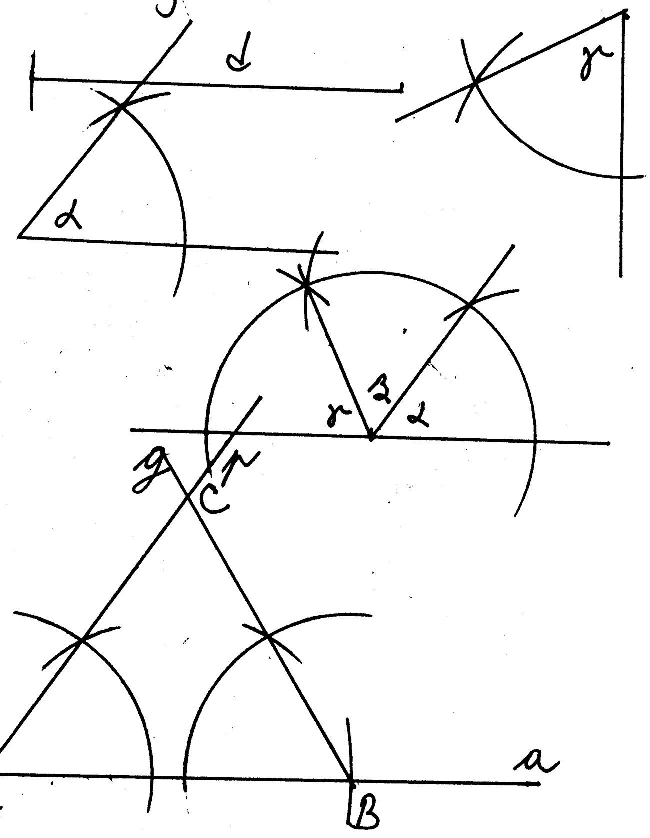
1. d_1, d_2, d_3
2. pp a sa početnom tačkom A
3. $k(A, d_1) \cap a = \{B\}$
4. $k(A, d_2) \cap k(B, d_3) = \{C\}$
5. ΔABC

Diskusija

Zadatak ima jedinstveno rješenje ako vrijedi $d_1 + d_2 > d_3$, $d_1 + d_3 > d_2$ i $d_2 + d_3 > d_1$.

4. Konstruisati trougao u kome je jedna stranica jednaka datoj duži, jedan ugao nalegao na tu stranicu jednak datom uglu i ugao naspram te stranice jednak drugom datom uglu.

R:



Konstrukcija

1. d, α, γ
2. $180°$, $\alpha + \gamma$, $\beta = 180° - (\alpha + \gamma)$
3. pp a sa početnom tačkom A
4. $k(A, d) \cap a = \{B\}$
5. pp p: $\sphericalangle BAp = \alpha$
6. pp g: $\sphericalangle ABg = \beta$
   i $g \in pr[a', p)$
   (a' je prava koja sadrži pp a)
7. $p \cap g = \{C\}$
8. ΔABC

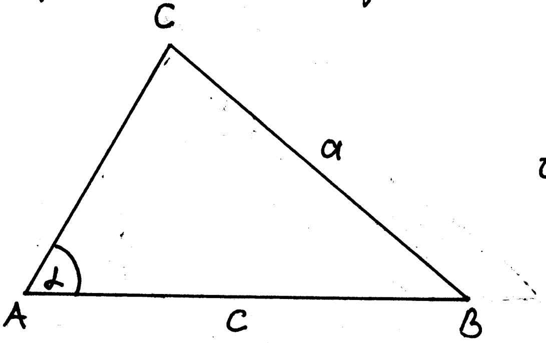
Diskusija

Zadatak ima jedinstveno rješenje ako i samo ako je $\alpha + \gamma < 180°$.

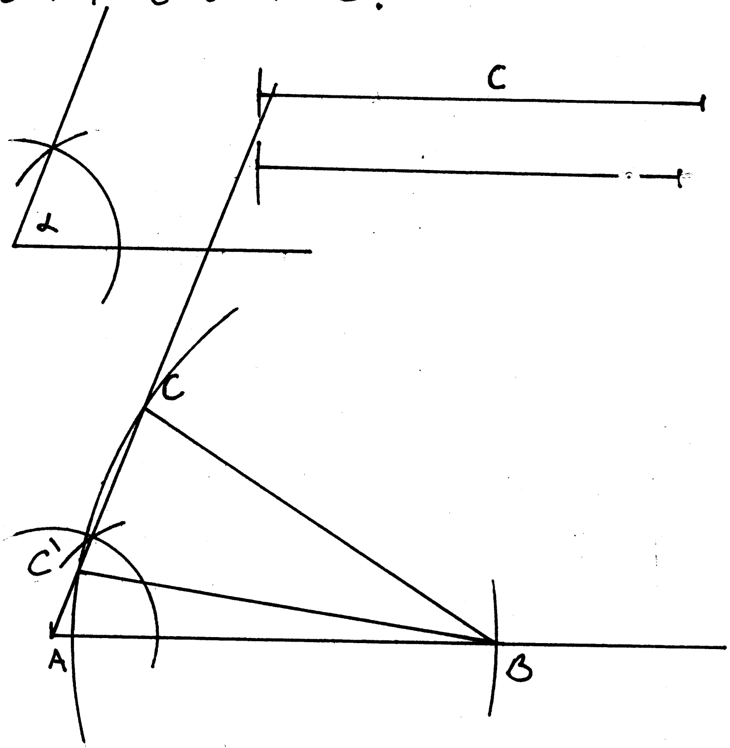
5. Konstruisati trougao kome su dvije stranice jednake dvijema datim dužima, a ugao naspram jedne od stranica jednak datom uglu

Rj. Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen. Neka je dat ΔABC.



kod koga su $BC = a$; $AB = c$ i $\sphericalangle CAB = \alpha$. Kako su dati ugao α i stranica c to je $p(A,C)$ određena. Sad nije teško dobiti tačku C.



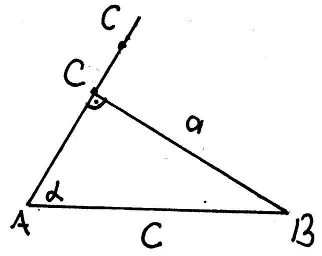
Konstrukcija

1. α, a, c
2. pp a sa početnom tačkom A
3. $k(A, c) \cap a = \{B\}$
4. pp q : $\sphericalangle aAq = \alpha$
5. $k(B, a) \cap q = \{C, C'\}$
6. ΔABC, $\Delta ABC'$

Diskusija

$\sin\alpha = \frac{a}{c}$

$a = \sin\alpha \cdot c$



elementi			broj rješenja
$a > c$,	α proizvoljno		1
$a = c$,	$\alpha < 90°$		1
$a = c$,	$\alpha \geq 90°$		0
$a < c$,	$\alpha \geq 90°$		0
$a < c$,	$\alpha < 90°$,	$a < c \cdot \sin\alpha$	0
$a < c$,	$\alpha < 90°$,	$a = c \cdot \sin\alpha$	1
$a < c$,	$\alpha < 90°$,	$a > c \cdot \sin\alpha$	2

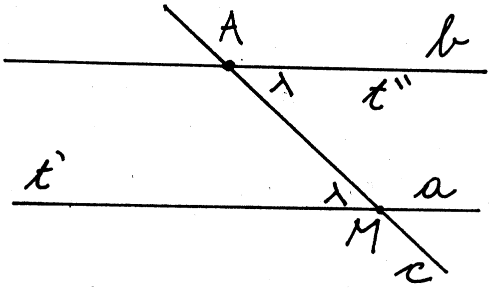
Ovaj zadatak služi kao primer da podudarnost dvije stranice i ugla u dva trougla nije dovoljan uvjet za podudarnost ta dva trougla. Oni će biti podudarni samo ukoliko je dat ugao naspram veće str.

Konstrukcija paralelnih pravih

(1.) Kroz datu tačku van date prave konstruisati pravu paralelnu toj pravoj.

Rj. Analiza

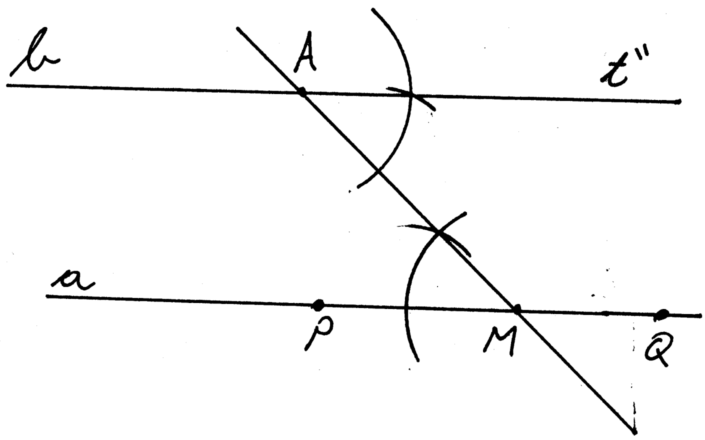
Pretpostavimo da je zadatak riješen. Neka je data prava a, tačka $A \notin a$ i neka je b tražena prava ($b \ni A$ i $b \parallel a$).



Neka je c proizvoljna prava koja sadrži tačku A i siječe pravu a u tački M. Označimo sa t' polupravu sa početnom tačkom M i $t' \subseteq a$ a sa t'' označimo polupravu sa početnom tačkom A takvu da $t'' \subseteq b$ i t', t'' se nalaze sa različite strane prave c.

Kako je $a \parallel b$ to $\sphericalangle t'MA \cong \sphericalangle MAt''$ pa pravu b na osnovu datih elemenata nije teško konstruisati.

Konstrukcija



1. a, $A \notin a$
2. proizvoljna prava c
   $c \ni A$ i $a \cap c = \{M\}$
3. $P \in a$, $Q \in A$, $P-M-Q$
4. pp t'' sa početnom tačkom A
   pp t'' i $p[M,P)$ se nalaze sa različite strane prave c
   i $\sphericalangle PMA = \sphericalangle MAt''$
5. b: $b \supseteq t''$

Dokaz

Na osnovu podudarnosti uglova na transferzali (iz konstrukcije) dobijamo da su prave a i b paralelne

Diskusija

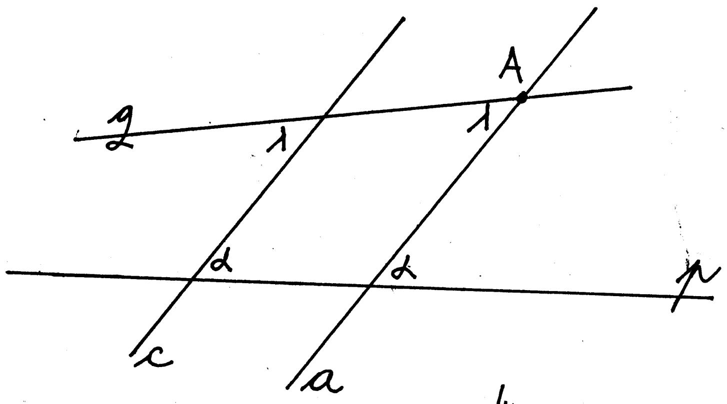
Jedinstvenost rješenja slijedi iz petog Euklidovog aksioma.

2. Konstruisati pravu koja prolazi kroz datu tačku (van date prave) i siječe datu pravu pod datim uglom.

Rj.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen. Neka je a tražena prava koja sadrži tačku $A \in p$, i siječe pravu p pod uglom α.

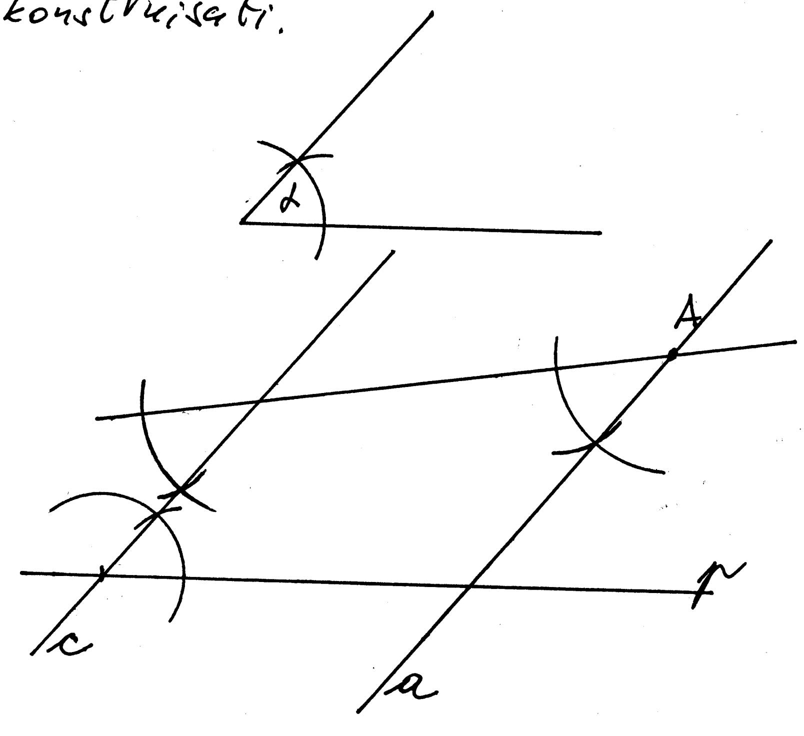


Neka je c proizvoljna prava koja siječe pravu p pod uglom α. Primijetimo da je $a \parallel c$.

Ako sa g označimo proizvoljnu pravu koja siječe prave a i c i koja sadrži tačku A, dobićemo jednake uglove λ na transferzali, pa pravu a sad nije teško konstruisati.

Konstrukcija

1. p, $A \notin p$, α
2. proizvoljnu pravu c takvu da siječe pravu p pod uglom α
3. proizvoljnu pravu g takvu da siječe prav... da sadrži tačku A.
4. pravu a: $A \in a$ i $a \parallel c$



Dokaz

Da dobijena prava prolazi kroz datu tačku i da siječe datu pravu pod datim uglom slijedi iz konstrukcije i osobina podudarnosti uglova na transferzali

Diskusija

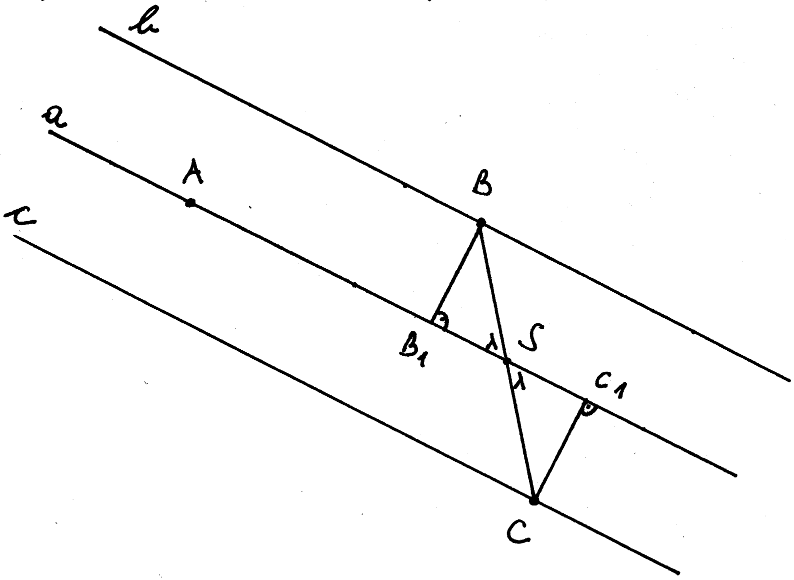
Jedinstvenost rješenja slijedi iz 5 Euklidovog aksioma.

Razni konstruktivni zadaci

(#) Date su tačke A, B i C koje ne pripadaju istoj pravoj. Konstruisati međusobno paralelne prave a, b i c kroz tačke A, B i C redom tako da su rastojanja između susjednih pravih podudarna.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka su a, b i c tri međusobno paralelne prave koje sadrže redom tačke A, B i C i neka je rastojanje između susjednih pravih podudarna.

Označimo sa B_1 ortogonalnu projekciju tačke B na pravu a i sa C_1 ortogonalnu projekciju tačke C na pravu a.

Neka je $\{S\} = a \cap BC$.

$$\left.\begin{array}{l} \measuredangle B_1SB \cong \measuredangle C_1SC = \lambda \text{ (unakrsni)} \\ \measuredangle BB_1S \cong SC_1C = 90^\circ \\ BB_1 \cong CC_1 \end{array}\right\} \xRightarrow{UUS} \triangle BB_1S \cong \triangle CC_1S$$

$$\Downarrow$$

$$BS \cong CS$$

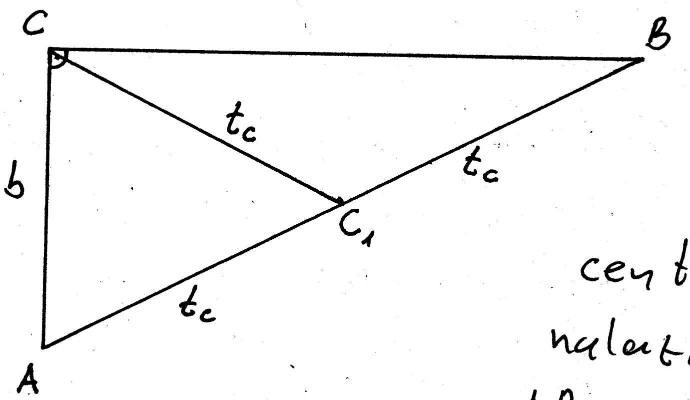
tj. S je sredina duži BC

Kako tačku S možemo konstruisati to možemo konstruisati i pravu a. Poslije ovoga nije teško konstruisati prave b i c.

(#) Konstruisati pravougli trougao ako su date jedna njegova kateta i težišna linija koja odgovara hipotenuzi.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



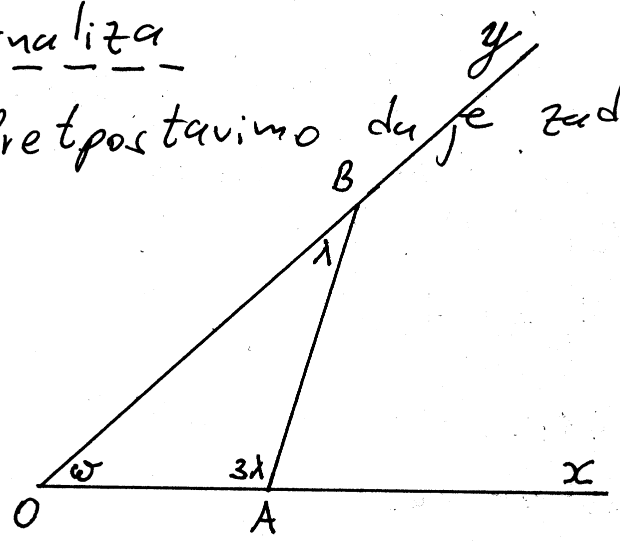
Neka je data kateta b i težišna linija t_c koja odgovara hipotenuzi AB. U pravouglom trouglu centar opisane kružnice se nalazi na sredini hipotenuze AB pa je $AC_1 \cong BC_1 = t_c$.
(dokazati ovu zadnju tvrdnju).

U trouglu ΔAC_1C su nam poznate sve tri stranice pa ga možemo konstruisati. Poslije ovoga nije teško dobiti tjeme B a time i ΔABC.

(#) Na kraku x ugla $\measuredangle xOy$ data je tačka A. Konstruisati na kraku y tačku B, tako da je $\measuredangle OAB = 3\measuredangle OBA$.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka je $\measuredangle xOy = \omega$ dati ugao, i neka je

$\measuredangle OAB = 3\lambda$, $\measuredangle OBA = \lambda$

$(\measuredangle OAB = 3\measuredangle OBA)$.

$$\omega + 4\lambda = 180^\circ$$

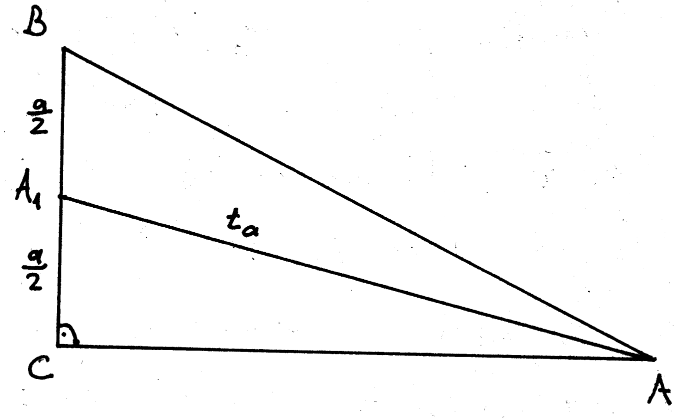
$$\lambda = 45^\circ - \frac{\omega}{4}$$

U trouglu ΔOAB nam je dato ugao ω, stranica OA i ugao 3λ pa prema pravilu USU ovaj trougao možemo konstruisati, a time i traženu tačku B.

Konstruisati pravougli trougao ako su date jedna njegova kateta i težišna linija koja odgovara datoj kateti.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka je $AA_1 = t_a$ težišna linija koja odgovara kateti BC. Tada je $A_1B \cong A_1C$.

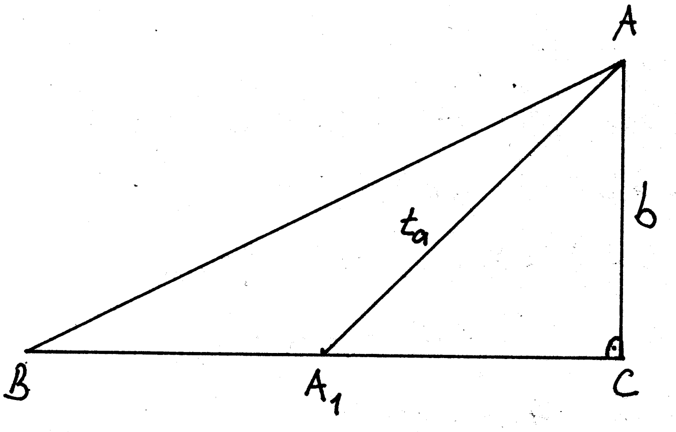
U ΔCAA_1 su nam poznate dvije stranice (t_a, $\frac{a}{2}$) i ugao ($\measuredangle C = 90°$) pa ga možemo konstruisati.

Poslije ovoga nije teško dobiti tačku B a time i ΔABC.

Konstruisati pravougli trougao ako su date jedna njegova kateta i težišna linija koja odgovara drugoj kateti.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka je $AA_1 = t_a$ težišna linija koja odgovara kateti BC. Tada je $BA_1 \cong CA_1$.

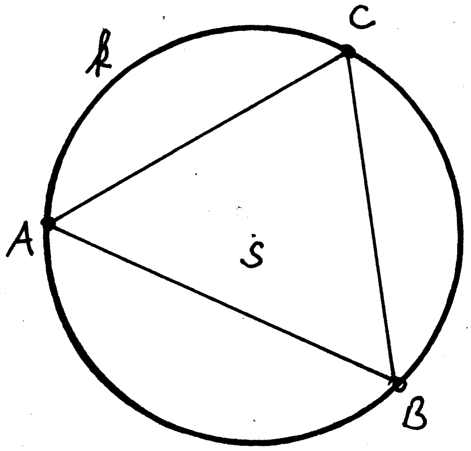
U ΔAA_1C su nam date dvije stranice i ugao naspram veće stranice pa ga možemo konstruisati.

Sad nije teško dobiti i tjeme B a time i ΔABC.

(#) Konstruisati kružnica kroz tri date tačke.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka su date tačke A, B i C kroz koje prolazi kružnica $k(S,r)$. Spojimo tačke A i B, A i C i B i C.

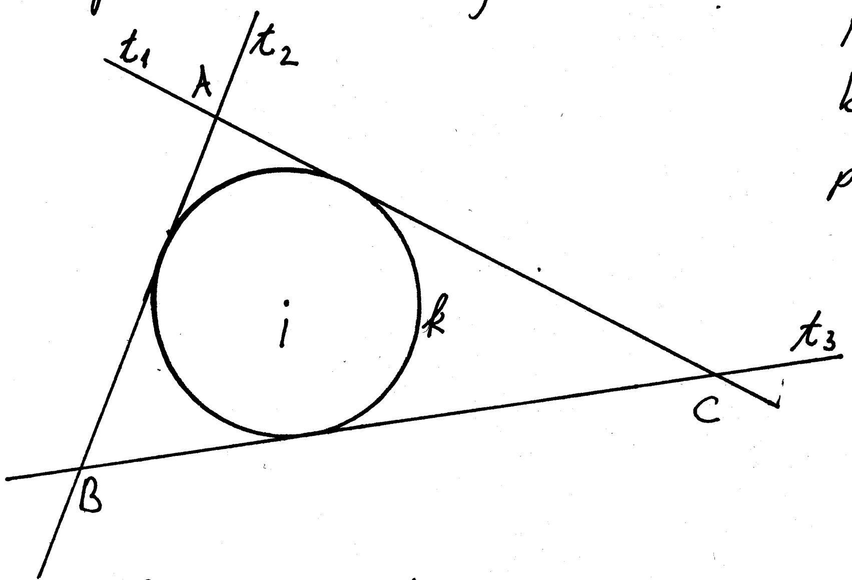
$k(S,r)$ je kružnica opisana oko trougla $\triangle ABC$ pa je nije teško konstruisati (S se nalazi na presjeku simetrala stranica).

Primjedba: Treba dokazati da je tačka dobijena presjekom simetrala stranica centar opisane kružnice $\triangle$.

(#) Konstruisati kružnicu koja dodiruje tri date prave.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka je $k(I,r)$ kružnica koja dodiruje tri date prave t_1, t_2 i t_3.

Neka je $t_1 \cap t_2 = \{A\}$, $t_2 \cap t_3 = \{B\}$ i $t_1 \cap t_3 = \{C\}$.

$k(I,r)$ je kružnica upisana u trougao $\triangle ABC$ pa je nije teško konstruisati (I se nalazi na presjeku simetrala uglova).

Primjedba: U dokazu ćemo pokazati da je I centar upisane kružnice trougla $\triangle ABC$.

Apsoloutna geometrija

Aksiome incidencije (pripadanja)

Postoji osam aksioma incidencije:

I_1 Za svake dvije tačke A i B postoji prava a koja je incidentna i sa tačkom A i sa tačkom B.

I_2 Za svake dvije tačke A i B postoji najviše jedna prava koja je incidentna sa svakom od tačaka A i B.

I_3 Za svaku pravu postoje bar dvije tačke koje su sa njom incidentne. Postoje bar tri tačke koje nisu incidentne sa istom pravom.

I_4 Za svake tri tačke A, B i C koje nisu incidentne sa istom pravom, postoji ravan koja je incidentna sa svkom od tačaka A, B, C.
Svakoj ravni je incidentna bar jedna tačka.

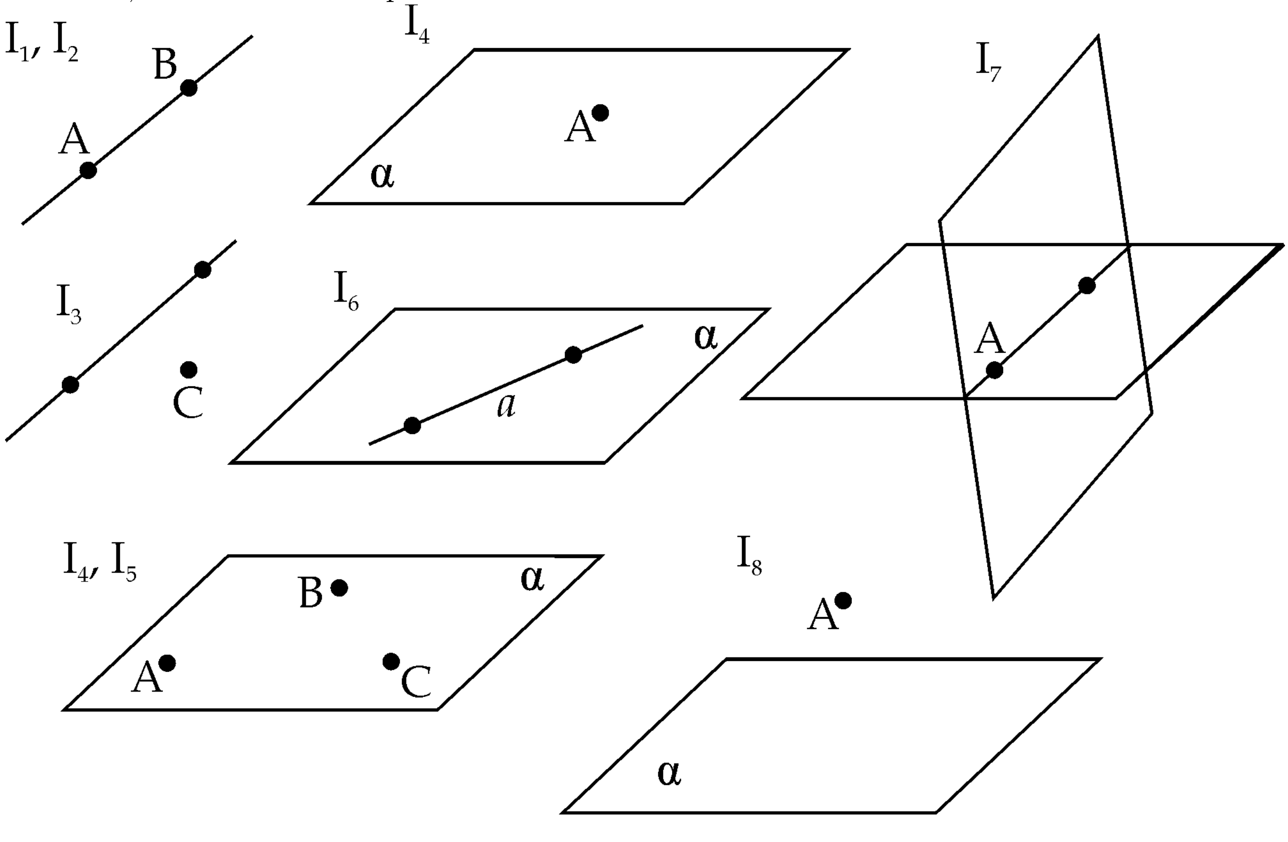
I_5 Za svake tri tačke A, B i C koje nisu incidentne sa istom pravom postoji najviše jedna ravan koja je incidentna sa svakom od tačaka A, B, C.

I_6 Ako su dvije tačke prave a incidentne sa ravni α, tada je svaka tačka prave a incidentne sa ravni α.

I_7 Ako postoji jedna tačka koja je incidentna i sa ravni α i sa ravni β, tada postoji bar još jedna tačka koja je incidentna i sa ravni α i sa ravni β.

I_8 Postoje bar četri tačke koje nisu incidentne sa istom ravni.

Skraćeno, aksiome možemo predstaviti slikama:



Pitanje: Kakva je razlika između aksioma I_1 i I_2?
Kakva je razlika između aksioma I_4 i I_5?

Urađeni zadaci

1. Dokazati da postoji jedna i samo jedna ravan koja sadrži datu pravu u tačku van nje.
2. Dokazati da postoji jedna i samo jedna ravan koja sadrži dvije date prave koje se sijeku.
3. Dokazati da presjek dvije različite prave može biti ili prazan skup ili tačka.
4. Dokazati da presjek dvije različite ravni može biti ili prazan skup ili prava.
5. Dokazati da za datu pravu a postoji prava b koja s njom nema zajedničkih tački.

   Napomena: Prave koje ne leže u jednoj ravni zovu se mimoilaznim pravama.
6. Dokazati da je svaka ravan incidentna sa najmanje tri tačke.
7. Dokazati da za svaku pravu a postoji prava b, takva da prave a i b ne pripadaju istoj ravni.

Aksiome poretka

Postoje četiri aksiome poretka:

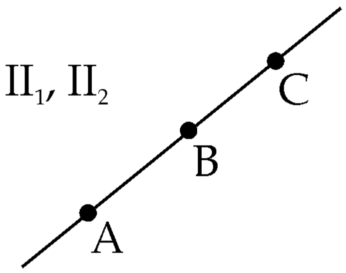
II_1 Ako je $A-B-C$ tada su A, B i C tri različite tačke jedne iste prave i takođe je $C-B-A$.

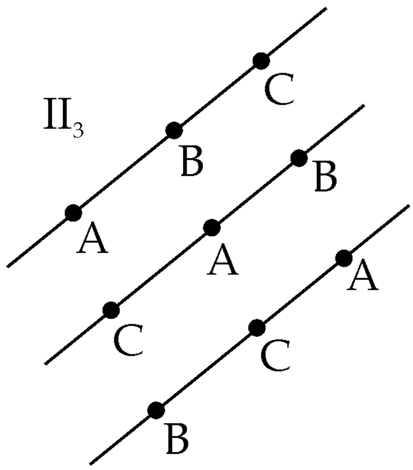
II_2 Za svake dvije tačke A i B postoji tačka C, takva da je $A-B-C$.

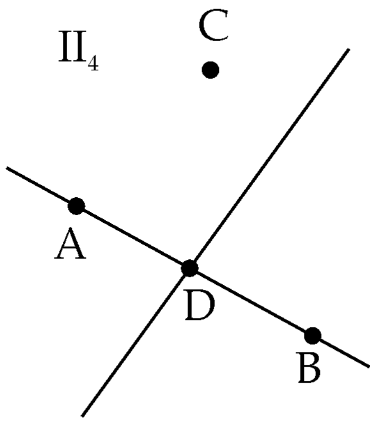
II_3 Ako su A, B i C tri tačke jedne prave, tada važi najviše jedna od relacija: $A-B-C$, $B-C-A$ ili $C-A-B$.

II_4 (Pašova aksioma) Neka su A, B, C tri nekolinearne tačke i neka je p prava koja je incidentna sa ravni ABC i nije incidentna ni sa jednom od tačaka A, B, C. Ako postoji tačka $D \in p$ takva da je $A-D-B$ tada postoji tačka $E \in p$ takva da važi bar jedna od relacija $B-E-C$ ili $C-E-A$.

Skraćeno aksiome predstavljene slikama:







Urađeni zadaci

8. Za svake dvije tačke A i B postoji tačka C takva da je $A-C-B$.
9. Date su četiri kolinearne tačke A, B, C, D. Dokazati da važe sljedeća dva tvrđenja:
   a) Ako je $A-B-D$ i $B-C-D$ tada je $A-B-C$;
   b) Ako je $A-B-D$ i $B-C-D$ tada je $A-C-D$.
10. Dokazati da svaka duž ima beskonačno mnogo tačaka.
11. (Pašova teorema) Prava p pripada ravni koja je određena nekolinearnim tačkama A, B, C i

ne sadrži nijednu od tih tačaka. Ako pri tom prava p siječe pravu $p(A, B)$ između tačaka A i B tada ona siječe ili pravu $p(B, C)$ između tačaka B i C ili pravu $p(A, C)$ između tačaka A i C.

12. Date su četiri kolinearne tačke A, B, C, D. Isključivo aksiomama incidencije i poretka dokazati da ako je $A - B - C$ i $A - C - D$ tada je $B - C - D$;

13. Neka je data poluravan α s ivicom u pravoj s i neka su date tačke $S \in s$ i $T \in \alpha$. Dokazati da je poluprava $pp[S, T) \subseteq \alpha$.

14. Prava koja pripada ravni nekog trougla i prolazi kroz jednu njegovu unutrašnju tačku ima sa tim trouglom tačno dvije zajedničke tačke. Dokazati.

15. Dat je ugao $\measuredangle aOb$ i tačka M unutar tog ugla. Dokazati da poluprava $pp[O, M)$ siječe svaku duž AB gdje je $A \in a$ i $B \in b$.

16. Isključivo aksiomama incidencije i poretka pokazati da je unutrašnjost trougla neprazan skup.

17. Neka se prave a i b sijeku u tački A i neka je $A - B - C$ na pravoj a, i $A - D - E$ na pravoj b. Isključivo aksiomama incidencije i poretka dokazati da se duž BE mora siječi sa duži CD u tački M.

18. Dokazati da svaka tačke prave dijeli tu pravu na dvije koneksne figure (poluprave).

Konveksnost

Figura F je konveksna ako za svake dvije tačke A i B iz F slijedi $AB \subseteq F$. Prazan skup $\emptyset$ i figura koja se sastoji od samo jedne tačke su konveksne.

Najpoznatije konveksne figure su: prava, poluprava, ravan, polurava, krug, sfera, kocka, paralelogram...

Izlomljena poligonalna linija je unija uzastopnih nadovezanih duži od kojih nijedna od dvije susjedne nadovezane duži ne pripadaju istoj oblasti.

Mnogougao je unija zatvorene poligonalne lonije (čije se duži ne sijeku) i njene unutrašnje oblasti.

Urađeni zadaci

19. Dokazati da je presjek dvije konveksne figure konveksna figura.
20. Dokazati da je unutrašnja oblast ugla, različitog od ravnog konveksan skup, dok je spoljašnja oblast tog ugla nekonveksan skup.
21. Dokazati da je unutrašnja oblast trougla konveksan skup i da je spoljašnja oblast trougla nekonveksan skup.
22. Dokazati da je mnogougao konveksan ako i samo ako se svi vrhovi mnogougla nalaze u istoj poluravni određenoj pravom koja sadrži ma koju stranicu tog mnogougla.
23. Četverougao je konveksan ako i samo ako mu se dijagonale sijeku.
24. Dokazati da je četverougao konveksan ako i samo ako svaka duž MN pri čemu $M \in AB$, $N \in CD$ siječe njegove dijagonale.
25. Dokazati da je četverougao konveksan ako i samo ako svaki vrh četverougla leži u spoljašnjoj oblasti trougla kojeg obrazuju ostala tri vrha četverougla.
26. Date su četri konveksne fugure u ravni takve da svake tri od njih imaju jednu zajedničku tačku. Dokazati da sve četri date figure imaju zajedničku tačku.
27. Dokazati da prava ne može sijeći sve stranice mnogougla sa neparnim brojem stranica.

Problemi broj 2

Zadaci za vježbu

28. Dokazati da ravan i prava koja ne pripada toj ravni mogu da imaju najviše jednu zajedničku tačku.
29. Ako četri različite tačke ne pripadaju istoj ravni tada među njima ne postoje tri kolinearne. Dokazati.
30. Dokazati da za svaku ravan postoji prava koja joj ne pripada.
31. Neka su A, B, C i D četiri kolinearne tačke. Dokazati da važe sljedeća tvrđenja:
    a) Ako je $A-B-C$ i $B-C-D$ tada je $A-B-D$;
    b) Ako je $A-B-C$ i $B-C-D$ tada je $A-C-D$;
32. Neka su A, B, C i D četiri kolinearne tačke. Dokazati da ako je $A-B-C$ i $A-D-C$ tada je ili $A-D-B$ ili $B-D-C$.
33. Neka su A, B, C, D, M četiri kolinearne tačke i neka je $A-C-B$, $A-D-B$ i $C-M-D$. Dokazati da je $A-M-B$.
34. Neka su A, B, C i D kolinearne tačke. Dokazati da iz $\neg(B-A-C)$ i $\neg(B-A-D)$ slijedi $\neg(C-A-D)$.
35. Neka su A, B, C i D kolinearne tačke. Dokazati da iz $B-A-C$ i $B-A-D$ slijedi $\neg(C-A-D)$.
36. Ako prava siječe jednu stranicu mnogougla, tada ona ima bar još jednu zajedničku tačku sa tim mnogouglom. Dokazati.
37. U ravni je dato n duži ($n \geq 3$), tako da svake tri od njih imaju zajedničku tačku. Dokazati da postoji tačka zajednička za sve duži.
38. Dokazati da svaka tačka prave dijeli tu pravu na dvije konveksne figure (poluprave).
39. Dokazati da svaka prava dijeli ravan kojoj pripada na dvije konveksne figure (poluravni).
40. Dokazati da je presjek konačnog broja konveksnih figura konveksna figura. Da li je presjek beskonačno mnogo konveksnih figura konveksna figura? Da li je unija konačnog broja konveksnih figura konveksna figura? (Odgovore obrazložiti.)
41. Dokazati da dvije prave koje se sijeku dijele ravan u kojoj leže na četri konveksne figure.
42. Dokazati da svaka ravan dijeli prostor na dvije konveksne figure (poluprostora).
43. Dokazati da dvije ravni koje se sijeku dijele prostor na četiri konveksne oblasti.
44. Dokazati da diedar različit od ravnog dijeli prostor na dvije oblasti od kojih je jedna konveksna (unutrašnjost diedra), a druga nije (spoljašnjost diedra).
45. Dokazati da triedar dijeli prostor na dvije oblasti od kojih je jedna konveksna (unutrašnjost triedra), a druga nije (spoljašnjost triedra).
46. Dokazati da tetraedar dijeli prostor na dvije oblasti od kojih je jedna konveksna (unutrašnjost tetraedra), a druga nije (spoljašnjost tetraedra).

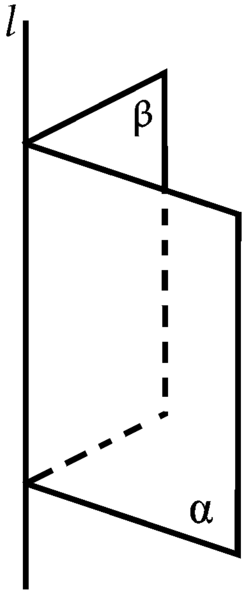
Napomena:

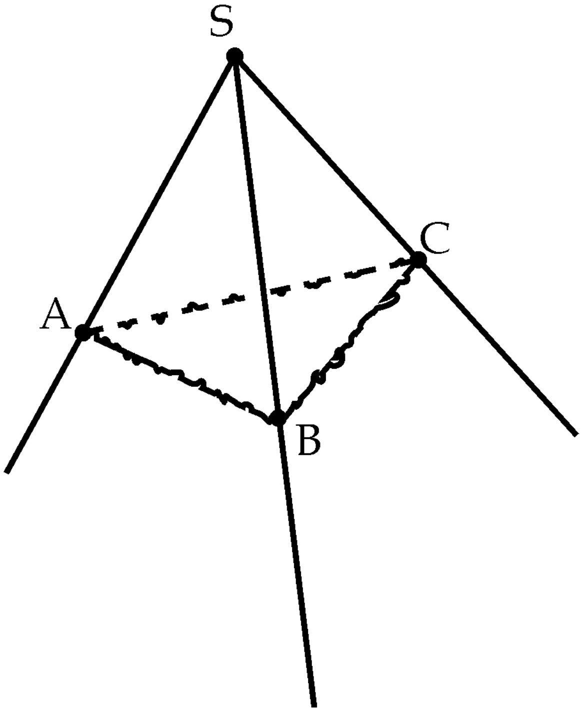
Diedar je skup od dvije poluravni koje ishode iz zajedničke prave. Zajednička prava se zove ivica diedra a poluravni su strane dijedra.

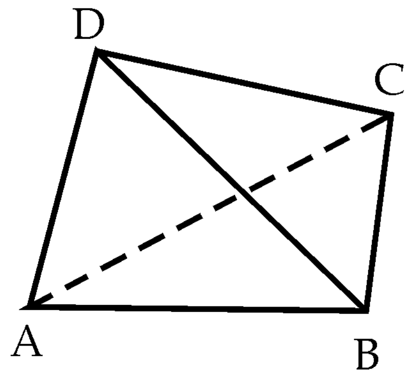
Triedar (trostrani poliedarski ugao) su tri poluprave $pp[S,A)$, $pp[S,B)$ i $pp[S,C)$ koje ishode iz jedne tačke S prostora i ne leže u jednoj ravni. Oglovi koje obrazuju po dvije od ovih polupravih nazivaju se ivični uglovi ili strane triedra. Tačka S je tjeme tetraedra.

Tetraedar ili trostrana piramida.

Poliedar (opisna definicija) je geometrisko tijelo trodimenzionalnog Euklidskog prostora ograničeno površima ravnih mnogouglova.







47. Dokazati da konveksan mnogougao i prava koja ne sadrži nijednu njegovu stranicu mogu da imaju najviše dvije zajedničke tačke.

48. Dokazati tvrđenja:
(a) Svaka dijagonala dijeli konveksan mnogougao na dva konveksna mnogougla;
(b) Svaka duž čije krajnje tačke pripadaju različitim stranicama konveksnog mnogougla dijeli taj mnogougao na dva konveksna mnogougla.

49. Mnogougao $A_1A_2...A_n$ je konveksan ako i samo ako su konveksni svi četverouglovi $A_iA_jA_kA_l$, $1 \leq i < j < k < l \leq n$. Dokazati.

50. (Helijeva teorema) Ako svake tri od n $(n \geq 3)$ konveksnih figura iste ravni imaju neprazan presjek, tada je presjek svih n figura neprazan.

51. U ravni je dato n duži $(n \geq 3)$, takve da svake tri od njih imaju zajedničku tačku. Dokazati da postoji tačka zajednička za sve duži.

APSOLUTNA GEOMETRIJA

Aksiome incidencije

Postoji osam aksioma incidencije (pripadanja):

I_1 Za svake dvije tačke A i B postoji prava a koja je incidentna i sa tačkom A i sa tačkom B.

I_2 Za svake dvije tačke A i B postoji najviše jedna prava koja je incidentna sa svakom od tačaka A i B

I_3 Za svaku pravu postoje bar dvije tačke koje su sa njom incidentne. Postoje bar tri tačke koje nisu incidentne sa istom pravom.

I_4 Za svake tri tačke A, B, C koje nisu incidentne sa istom pravom, postoji ravan koja je incidentna sa svakom od tačaka A, B, C. Svakoj ravni je incidentna bar jedna tačka.

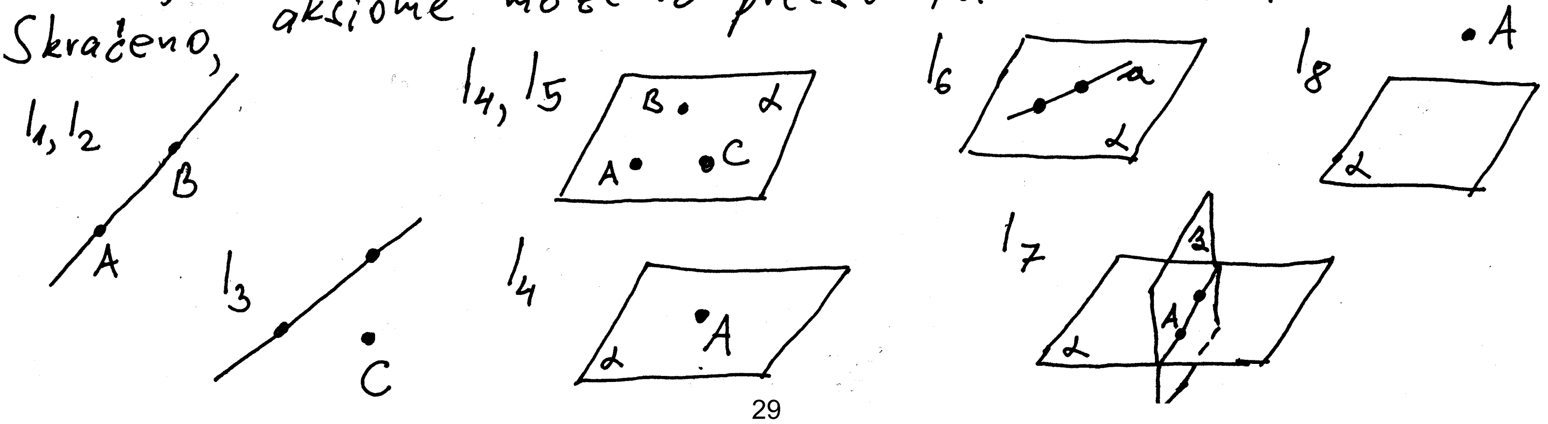
I_5 Za svake tri tačke A, B, C koje nisu incidentne sa istom pravom postoji najviše jedna ravan koja je incidentna sa svakom od tačaka A, B, C.

I_6 Ako su dvije tačke prave a incidentne sa ravni α, tada je svaka tačka prave a incidentna sa ravni α.

I_7 Ako postoji jedna tačka koja je incidentna i sa ravni α i sa ravni β, tada postoji bar još jedna tačka koja je incidentna i sa ravni α i sa ravni β.

I_8 Postoje bar četri tačke koje nisu incidentne sa istom ravni.

Skraćeno, aksiome možemo predstaviti slikama:

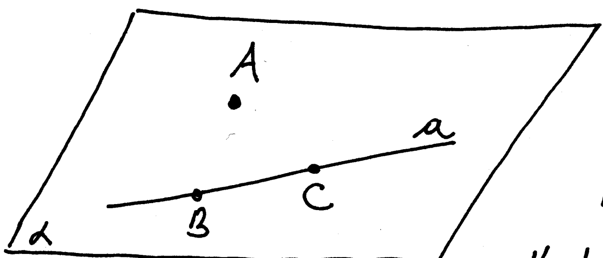


PITANJE: Kakva je razlika između aksioma I_1 i I_2?
Kakva je razlika između aksioma I_4 i I_5?

1° Dokazati da postoji jedna i samo jedna ravan koja sadrži datu pravu i tačku van nje.

Rj. postavka zadatka:

$a,\ A \notin a \Rightarrow \exists!$ ravan α: $a \subseteq \alpha$ i $A \in \alpha$



Za pravu a prema aksiomi I_3 $\exists B, C: B \in a$ i $C \in a$.

Tačke A, B i C su nekolinearne pa prema I_4, I_5 $\exists! \alpha: A \in \alpha, B \in \alpha$ i $C \in \alpha$

Kako je $B \in a, B \in \alpha$ i $C \in a, C \in \alpha$ prema aksiomu I_6 $a \subseteq \alpha$.

Prema tome $\exists!$ ravan α: $a \subseteq \alpha \wedge A \in \alpha$

q.e.d.

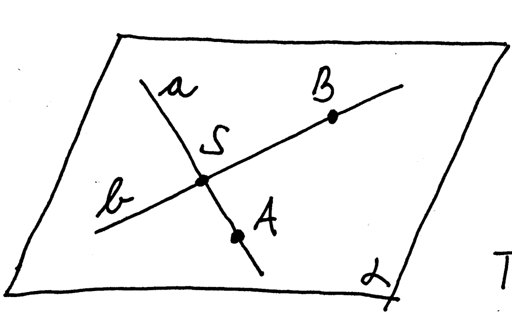
2° Dokazati da postoji jedna i samo jedna ravan koja sadrži dvije date prave koje se sijeku.

Rj. postavka zadatka:

$a,\ b,\ a \not\equiv b,\ a \cap b = \{S\} \Rightarrow \exists! \alpha: a \subseteq \alpha$ i $b \subseteq \alpha$

($\not\equiv$ čita se nije identički jednako)

$S \in a$ i $S \in b$



Pored S na pravoj a prema I_3 $\exists A: A \in a$

Pored tačke S na b prema I_3 $\exists B: B \in a$

Tačke A, B i S su nekolinearne. Zašto?

Ako bi A, B i S bile kolinearne to bi značilo da $\exists$ prava p: $A,B,S \in p$

$$\left.\begin{array}{l} A,S \in p \text{ i } A,S \in a \text{ prema } I_1, I_2\ p \equiv a \\ B,S \in p \text{ i } B,S \in b \text{ prema } I_1, I_2\ p \equiv b \end{array}\right\} \Rightarrow a \equiv b$$

#kontradikcija (sa $a \not\equiv b$)

A, B i S su nekolinearne tačke pa prema I_4, I_5 $\exists!$ ravan α: $A \in \alpha$, $B \in \alpha$ i $C \in \alpha$

Kako $A \in a$ i $S \in a$, $A \in \alpha$ i $S \in \alpha$ prema I_6 $a \subseteq \alpha$

Kako $B \in b, S \in b$ i $B \in \alpha, S \in \alpha$ prema I_6 $b \subseteq \alpha$.

Prema tome $\exists!$ ravan α: $a \subseteq \alpha$ i $b \subseteq \alpha$

q.e.d.

$$\boxed{p \Rightarrow (q \veebar r) \Leftrightarrow (p \wedge \neg q \Rightarrow r) \wedge (p \wedge r \Rightarrow \neg q)}$$

3. Dokazati da presjek dvije različite prave može biti: ili prazan skup ili tačka.

Rj. postavka zadatka:

$$a,\ b,\ a \not\equiv b \Rightarrow a \cap b = \emptyset \veebar a \cap b = \{S\}.$$

zadatak možemo podijeliti u dva dijela

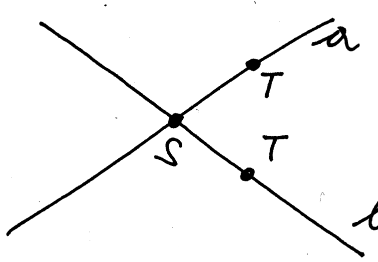
a) $a,\ b,\ a \not\equiv b,\ a \cap b \neq \emptyset \Rightarrow a \cap b = \{S\}$

b) $a,\ b,\ a \not\equiv b,\ a \cap b = \{S\} \Rightarrow a \cap b \neq \emptyset$

Slučaj pod b) je trivijalan.

Dokažimo slučaj pod a) (dokazačemo kontradikcijom).

Kako je $a \cap b \neq \emptyset$, recimo da pored tačke S prave a i b imaju i neku zajednička tačka T tj. $\{S, T\} \subseteq a \cap b$.



Kako $S \in a, T \in a$ i $S \in b, T \in b$ prema I_1, I_2 $a \equiv b$ # kontradikcija (sa $a \not\equiv b$)

Pretpostavka da postoje dvije tačke kao presjek pravih a i b nas vodi u kontradikciju pa nije tačna. Pa je $a \cap b = \{S\}$.

Kako su obe tvrdnje pod a) i b) tačne slijedi da

$$a \cap b = \emptyset \veebar a \cap b = \{S\}$$

q.e.d.

4_0 Dokazati da presjek dvije različite ravni može biti ili prazan skup ili prava.

Rj postavka zadatka:

$\alpha, \beta, \alpha \not\equiv \beta \Rightarrow \alpha \cap \beta = \emptyset \veebar \alpha \cap \beta = p$

Imamo dva dijela dokaza

a) $\alpha, \beta, \alpha \not\equiv \beta, \quad \alpha \cap \beta \neq \emptyset \Rightarrow \alpha \cap \beta = p$

b) $\alpha, \beta, \quad \alpha \cap \beta = p \Rightarrow \alpha \cap \beta \neq \emptyset$

Slučaj pod b) je trivijalan. Dokažimo slučaj pod a).

Kako je $\alpha \cap \beta \neq \emptyset$ to $\exists$ tačka A: $A \in \alpha \cap \beta$

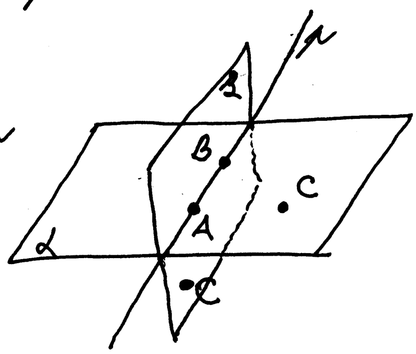
$A \in \alpha$ i $A \in \beta$ prema aksiomi I_7 $\exists B: B \in \alpha$ i $B \in \beta$

Za A i B prema I_1, I_2 $\exists!$ prava p: $A \in a$ i $B \in a$

Kako $A \in p, B \in p$ i $A \in \alpha, B \in \alpha$ prema I_6 $p \subseteq \alpha$

Kako $A \in p, B \in p$ i $A \in \beta, B \in \beta$ prema I_6 $p \subseteq \beta$

Dokažimo još da je $\alpha \cap \beta = p$



Pretpostavimo da pored prave p $\exists C \notin p$ takva da je $p \cup \{C\} \subseteq \alpha \cap \beta$.

Za p i C prema zadatku 1_0 postoji $\exists! \gamma: p \subseteq \gamma$ i $C \in \gamma$.

Sad imamo $\gamma \subseteq \alpha \cap \beta \Rightarrow \alpha \cap \beta = \gamma \Rightarrow \alpha \equiv \beta$
#kontradikcija (sa $\alpha \not\equiv \beta$)

Do kontradikcije smo mogli doći i na drugi način:

$p \cup \{C\} \subseteq \alpha \cap \beta \Rightarrow C \in \alpha$ i $C \in \beta$

$A \in \alpha, B \in \alpha, C \in \alpha$ i $A \in \beta, B \in \beta, C \in \beta$ prema I_1, I_2 $\alpha \equiv \beta$
#kontradikcija

Pretpostavka da pored prave p postoji još neka tačka na presjeku dvije ravni nas vodi u kontradikciju pa nije tačna. Prema tome $\alpha \cap \beta = p$.

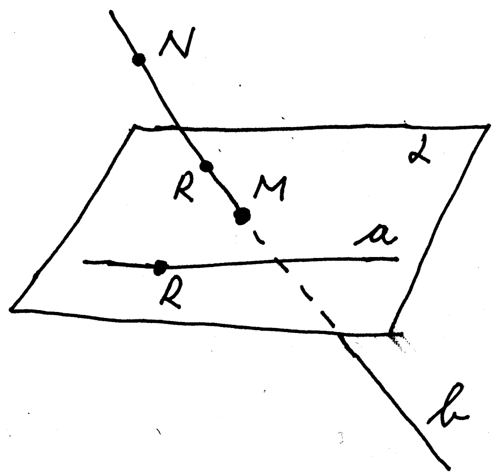
Kako su obe tvrdnje pod a) i b) tačne, slijedi da ili $\alpha \cap \beta = \emptyset$ ili $\alpha \cap \beta = p$ q.e.d.

5. Dokazati da za datu pravu a postoji prava b koja s njom nema zajedničkih tački.

Napomena: Prave koje ne leže u jednoj ravni zovu se mimoilaznim pravama.

Rj. postavka zadatka:

$$a \Rightarrow \exists b: a \cap b = \emptyset$$



Neka je data prava a.

Prema aksiomi I_3 $\exists M: M \notin a$.

Za M i a prema 1. zadatku $\exists! \alpha: M \in \alpha$ i $a \subseteq \alpha$.

Za ravan α prema I_8 $\exists N: N \notin \alpha$

Za M i N prema I_1, I_2 $\exists! b: M \in b$ i $N \in b$.

Za prave a i b prema 3. zadatku ili $a \cap b = \emptyset$ ili $a \cap b = \{R\}$

Pretpostavimo da je $a \cap b \neq \emptyset$. To znači $a \cap b = \{R\} \Rightarrow$
$\Rightarrow R \in a$ i $R \in b$. Kako je $a \subseteq \alpha$ i $R \in a$ to je $R \in \alpha$.
$R \in \alpha, M \in \alpha$ i $R \in b, M \in b$ prema I_6 $b \subseteq \alpha \Rightarrow N \in \alpha$ #kontradikcija ($N \notin \alpha$)

Pretpostavka da je $a \cap b \neq \emptyset$ nas vodi u kontradikciju pa nije tačna. Prema tome $a \cap b = \emptyset$.

Dokazali smo da za pravu a postoji prava b taka da je $a \cap b = \emptyset$

q.e.d.

6. Dokazati da je svaka ravan incidentna sa najmanje tri tačke.

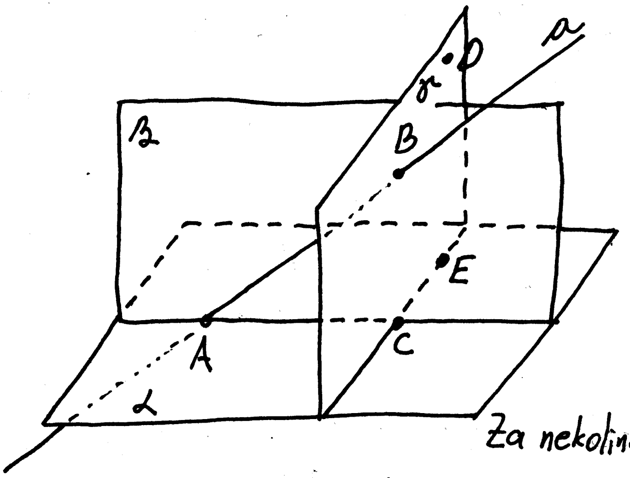
Rj. postavka zadatka

$$\text{ravan } \alpha \Rightarrow \exists \text{ tačke } A, B \text{ i } C: A \in \alpha, B \in \alpha \text{ i } C \in \alpha.$$

Za datu ravan α prema aksiomi I_4 $\exists A: A \in \alpha$.

Za ravan α, prema I_8 $\exists B: B \notin \alpha$.

Za A i B prema I_1, I_2. $\exists! a: A \in a$ i $B \in a$.



Za pravu a prema I_3 $\exists C : C \notin a$

Moguća su dva slučaja:

1° $C \in \alpha$

2° $C \notin \alpha$

1° $C \in \alpha$

Za nekolinea. A, B, C prema I_4, I_5 $\exists!\, \beta : A \in \beta,\ B \in \beta$ i $C \in \beta$

Za β prema I_8 $\exists D : D \notin \beta$. Moguća su dva slučaja

a) $D \in \alpha$

b) $D \notin \alpha$.

Ako bi bilo da $D \in \alpha$, problem je riješen: Tri tražene tačke koje pripadaju ravni α su A, C i D.

Ako $D \notin \alpha$, tad za nekolinear. C, B i D prema I_4, I_5 $\exists!\, \gamma : B \in \gamma, C \in \gamma$ i $D \in \gamma$.

Iz $D \in \alpha$, $D \in \gamma$ prema aksiomu I_7 $\exists E : E \in \alpha$ i $E \in \gamma$

$E \notin p(A, C)$

(Ako bi $E \in p(A,C)$, $C \in \gamma$ i $E \in \gamma$ prema I_6 $p(C,E) \subseteq \gamma$, tad $A \in \gamma$. Dalje imali bi $A, C, B \in \gamma$ pa prema I_4, I_5 (kako ravan β određuju tačke A, C i B) je $\gamma \equiv \beta \Rightarrow D \in \beta$

kontradikcija (sa $D \notin \beta$))

Prema tome tri tražene tačke koje su incidentne sa α su A, C i E

Ostaje nam još slučaj 2° $C \notin \alpha$

A, B, C nekolinearne, prema I_4 $\exists \beta : A \in \beta, B \in \beta$ i $C \in \beta$

$A \in \alpha$ i $A \in \beta$ prema I_7 $\exists D : D \in \alpha$ i $D \in \beta$

Za ravan β prema I_8 $\exists E : E \notin \beta$

Ako bi bilo $E \in \alpha$, zadatak je gotov.
(tačke A, D i E incidentne su sa α)

Za $E \notin \alpha$ imamo:

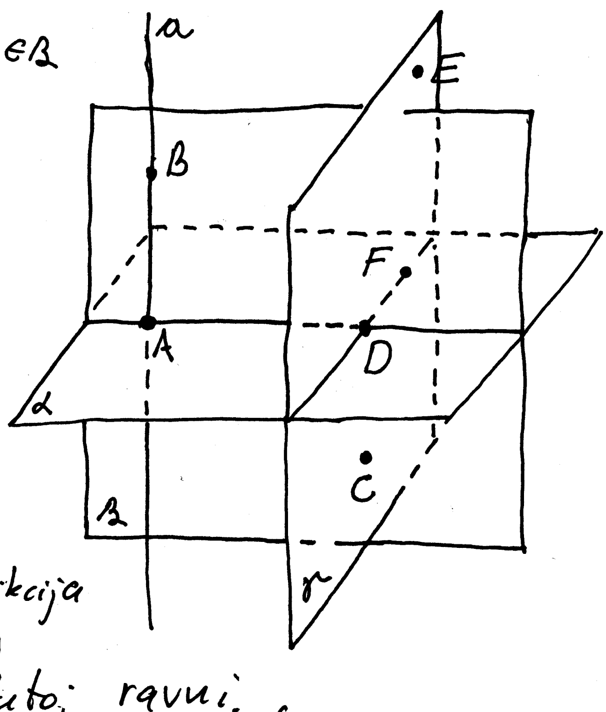
E, D i C nekolinearne, prema I_4, I_5 $\exists!\, \gamma : E, D, C \in \gamma$

$D \in \alpha$ i $D \in \gamma$ prema I_7 $\exists F : F \in \alpha$ i $F \in \gamma$

$F \notin p(A, D)$ (Ako bi $F \in p(A,D)$ imali bi

$A \in p(F,D) \subseteq \gamma$, $\left.\begin{matrix} A, D, C \in \gamma \\ A, D, C \in \beta \end{matrix}\right\} \xRightarrow{I_4, I_5} \beta \equiv \gamma \Rightarrow E \in \beta$

kontradikcija ($E \notin \beta$)



Tačke A, D i F su incidentne sa α.

Našli smo tri tačke koje pripadaju datoj ravni.

q.e.d.

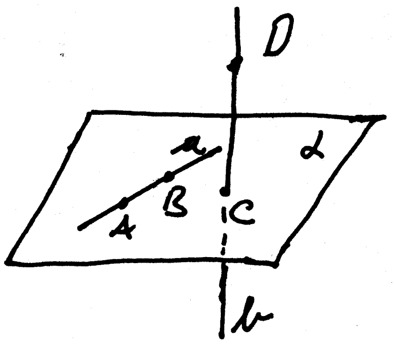
(#) Isključivo aksiomama incidencije i poretka dokazati da za svaku pravu a postoji prava b, takva da prave a i b ne pripadaju istoj ravni.

Napomena: Prave koje ne leže u jednoj ravni zovu se mimoilaznim pravama.

Rj: postavka zadatka

prava a $\Longrightarrow$ $\exists b$: a i b ne pripadaju istoj ravni

---



Neka je data prava a.
Prema aksiomi I_3 $\exists C: C \notin a$, i prema istoj aksiomi $\exists A, B$: $A, B \in a$.

Za tačke A, B i C (koje su nekolinearne) prema aksiomi I_1 i I_6 $\exists$ tačno jedna ravan α: $A \in \alpha$, $B \in \alpha$ i $C \in \alpha$.
Za ravan α prema aksiomi I_8 $\exists$ tačka D takva da $D \notin \alpha$. Prava $p(D,C)$ je tražena prava.

Uvedimo oznaku $b = p(D, C)$.

Ako bi prave a i b bile komplanarne, tj. pripadale nekoj ravni β, imali bi da $A, B, C, D \in \beta$.

$$\left.\begin{matrix} A, B, C \in \alpha \\ A, B, C \in \beta \end{matrix}\right\} \xRightarrow{I_4, I_5} \alpha \equiv \beta \Rightarrow b \subset \alpha \Rightarrow D \in \alpha$$

#kontradikcija

Pretpostavka da su prave a i b komplanarne nas vodi u kontradikciju pa nije tačna. Prema tome: za svaku pravu a postoji prava b, takva da prave a i b ne pripadaju istoj ravni. q.e.d.

(Zadaci su skinuti sa stranice: \pf.unze.ba\nabokov
Za uočene greške pisati na **infoarrt@gmail.com**)

Aksiome poretka

Postoje četiri aksiome poretka:

II_1 Ako je $A-B-C$ tada su A, B i C tri različite tačke jedne iste prave i takođe je $C-B-A$.

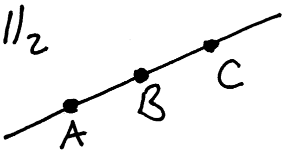
II_2 Za svake dvije tačke A i B postoji tačka C, takva da je $A-B-C$

II_3 Ako su A, B i C tri tačke jedne prave, tada važi najviše jedna od relacija: $A-B-C$, $B-C-A$ ili $C-A-B$.

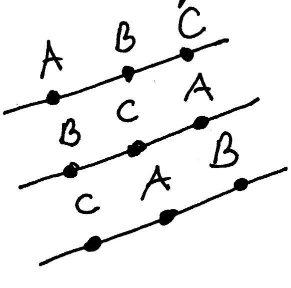
II_4 (Pašova aksioma) Neka su A, B, C tri nekolinearne tačke i neka je p prava koja je incidentna sa ravni ABC i nije incidentna ni sa jednom od tačaka A, B, C. Ako postoji tačka $D \ni p$ takva da je $A-D-B$ tada postoji tačka $E \in p$ takva da važi bar jedna od relacija $B-E-C$ ili $C-E-A$.

Skraćeno, aksiome možemo predstaviti slikama:

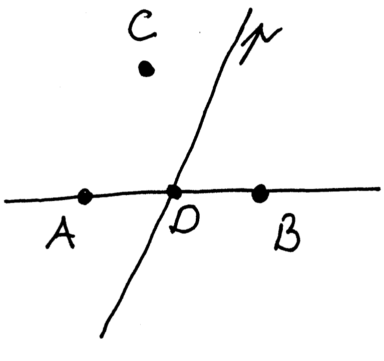
II_1, II_2



II_3



II_4



(1.) Za svake dvije tačke A i B postoji tačka C takva da je $A-C-B$.

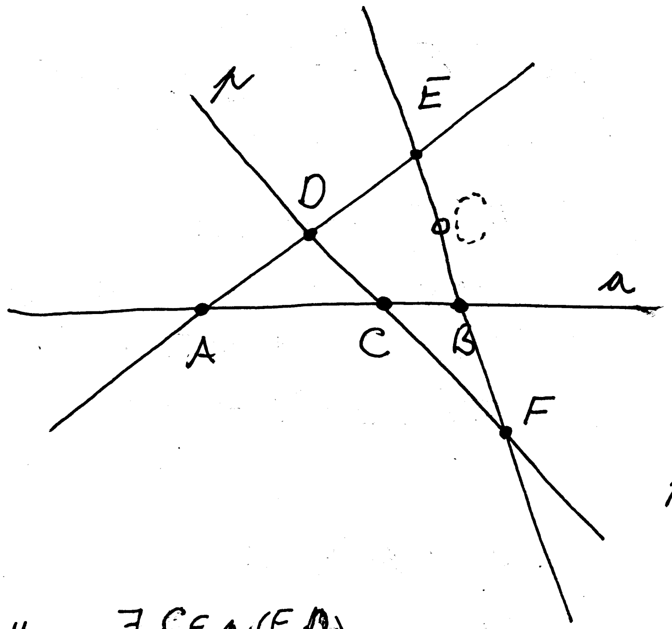
Rj. postavka zadatka:

$$A, B \implies \exists C : A-C-B$$

Neka su date tačke A i B. Pomoću aksioma incidencije i poretka trebamo dokazati da postoji C takva da je $A-C-B$.

za A i B prema I_1, I_2 $\exists!\, a : A \in a$ i $B \in a$

za pravu a prema I_3 $\exists D : D \notin a$



za $A, D \overset{II_2}{\Longrightarrow} \exists E: A-D-E$

za $E, B \overset{II_2}{\Longrightarrow} \exists F: E-B-F$

za $D, F \overset{I_1, I_2}{\Longrightarrow} \exists!\, p: D \in p$ i $F \in p$

$\left.\begin{array}{l} A, B, E \text{ nekolin. tačke} \\ p(F,D) \text{ nije incidentna ni sa jednom od tački } A, B, E \\ A-D-E \end{array}\right\} \overset{II_4}{\Longrightarrow}$

$\overset{II_4}{\Longrightarrow} \quad \exists\, C \in p(F,D) \quad A-C-B \;\veebar\; B-C-E$

Pokažimo da ne vrijedi $B-C-E$.

Ako bi ovo vrijedilo, to znači da $C \ni p$: $E-C-B$

$$\left.\begin{array}{l} C, F \in p \\ C, F \in p(E,B) \end{array}\right\} \overset{I_1, I_2}{\Longrightarrow} p = p(E,B)$$

$$\Downarrow$$

$$D, E, C, B, F \in p$$

$$\left.\begin{array}{l} A-D-E \\ D, E \in p \end{array}\right\} \overset{I_1, I_2}{\Longrightarrow} A, B, C, D, E, F \in p \Rightarrow p \equiv a$$

$$\Downarrow$$

$$D \in a$$

#kontradikcija ($D \notin a$)

Pokazali smo da ne vrijedi $B-C-E$, pa nam vrijedi $A-C-B$

q.e.d.

2. Date su četiri kolinearne tačke A, B, C, D. Dokazati da važe sljedeća dva tvrđenja:

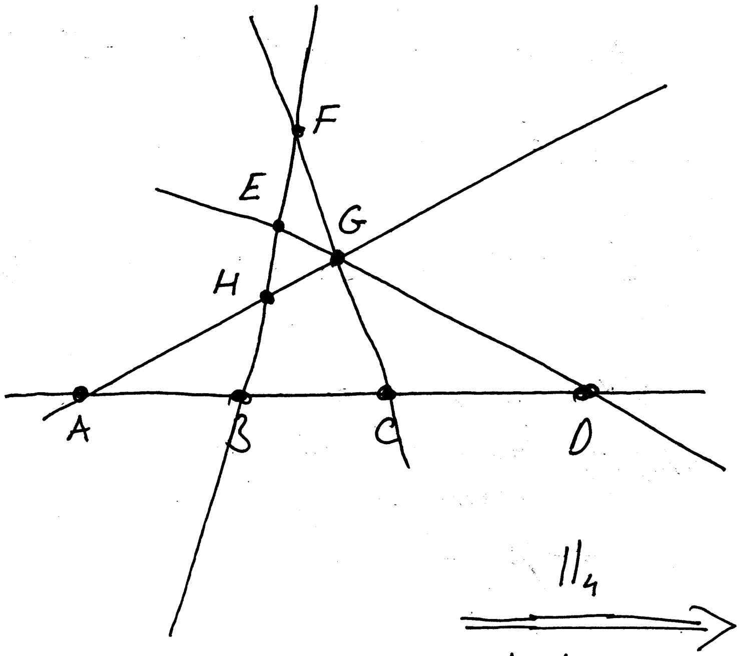
a) Ako je $A-B-D$ i $B-C-D$ tada je $A-B-C$

b) Ako je $A-B-D$ i $B-C-D$ tada je $A-C-D$

Rj. a) $A-B-D \wedge B-C-D \Rightarrow A-B-C$

A, B, C, D kolinearne tačke $\Rightarrow A, B, C, D \in p(A,D)$

za $p(A,D) \overset{I_3}{\Longrightarrow} \exists E: \quad E \notin p(A,D)$



za $B, E \xRightarrow{II_2} \exists F:\ B-E-F$

$$\left.\begin{array}{l} B, C, F \text{ nekolinearne tačke} \\ p(E,D) \text{ nije incidentna ni} \\ \quad \text{sa jed. od tač. } B, C, F \\ p(E,D) \ni E:\ B-E-F \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\xRightarrow[\text{(i kako je poredak } B-C-D)]{II_4} \quad \exists G \in p(E,D):\ C-G-F$$

$$\left.\begin{array}{l} B, D, E \text{ nekolinearne tačke} \\ p(C,F) \text{ nije incidentna ni} \\ \quad \text{sa jedn. od tač. } B, D, E \\ p(C,F) \ni C:\ B-C-D \end{array}\right\} \xRightarrow[\text{(i kako je poredak } B-E-F)]{II_4} \begin{array}{l} \exists G \in p(C,F): \\ D-G-E \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} A, D, G \text{ nekolinearne tačke} \\ p(B,F) \text{ nije incidentna ni} \\ \quad \text{sa jedn. od. tač. } A, D, G \\ p(B,F) \ni B:\ A-B-D \end{array}\right\} \xRightarrow[\text{(i kako je poredak } D-G-E)]{II_4} \begin{array}{l} \exists H \in p(B,F): \\ A-H-G \end{array}$$

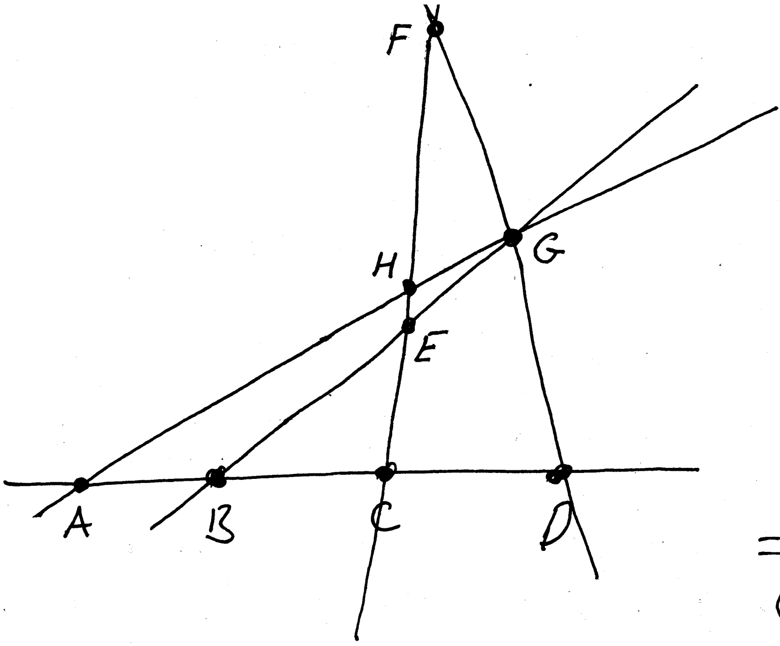
$$\left.\begin{array}{l} A, C, G \text{ nekolinearne tačke} \\ p(B,F) \text{ nije incidentna ni} \\ \quad \text{sa jednom od tač. } A, C, G \\ p(B,F) \ni H:\ A-H-G \end{array}\right\} \xRightarrow[\text{(i kako je poredak } C-G-F)]{II_4} \begin{array}{l} B \in p(B,F): \\ A-B-C \end{array}$$

q.e.d.

b) $A-B-D \ \wedge\ B-C-D \Rightarrow A-C-D$

A, B, C, D kolinearne tačke $\Rightarrow A, B, C, D \in p(A,D)$

za $p(A,D) \xRightarrow{I_3} \exists E:\ E \notin p(A,D)$



za $C, E \xRightarrow{II_2} \exists F: C-E-F$

C, D, F nekolin. tač.
$p(B,E)$ nije incidentna ni sa jed. od tač. C, D, E
$p(B,E) \ni E: \; C-E-F$

$\xRightarrow[\text{(i kako je poredak } B-C-D)]{II_4}$ $\exists\, G \in p(B,E): \; D-G-F$

B, D, G nekolinearne tačke
$p(C,F)$ nije incidentna ni sa jed. od tač. B, D, G
$p(C,F) \ni C: \; B-C-D$

$\xRightarrow[\text{(i kako je poredak } D-G-F)]{II_4}$ $E \in p(C,F): \; B-E-G$

$A-B-D \;;\; B-C-D \xRightarrow{\text{na osnovu zadatka pod a)}} A-B-C$

A, B, G nekolinearne tačke
$p(C,F)$ nije incidentna ni sa jed. od tačaka A, B, G
$p(C,F) \ni E: \; B-E-G$

$\xRightarrow[\text{(i kako je poredak } A-B-C)]{II_4}$ $\exists\, H \in p(C,F): \; A-H-G$

A, D, G nekolinearne tačke
$p(C,F)$ nije incidentna ni sa jed. od tač. A, D, G
$p(C,F) \ni H: \; A-H-G$

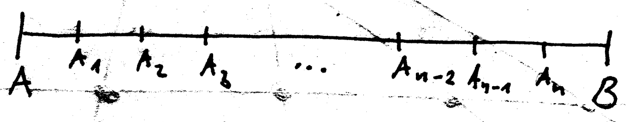
$\xRightarrow[\text{(i kako je poredak } D-G-F)]{II_4}$ $C \in p(C,F): \; A-C-D$

q.e.d.

3. Dokazati da svaka duž ima beskonačno mnogo tačaka.

Rj. data je duž AB $\Rightarrow$ AB ima ∞ mnogo tačaka

Neka je data duž AB.



Pretpostavimo suprotno tvrdnji, tj. pretpostavimo da duž AB ima konačno mnogo tački $A_1, A_2, \dots, A_n$ i bez ograničenja za opšti slučaj pretpostavimo da važi poredak $A - A_1 - A_2 - \dots - A_{n-1} - A_n - B$.

Pitanje: Zašto smijemo pretpostaviti da važi ovakav poredak?

Za tačke A_n i B prema zadatku 1. postoji tačka M takva da je $A_n - M - B$. Sad imamo:

$$\left.\begin{array}{l} A - A_n - B \\ A_n - M - B \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{prema zadatku 2.}} A - M - B$$

tj. tačka M se nalazi na duži AB

\# kontradikcija (sa pretpostavkom da su $A_1, A_2, \dots, A_n$ sve tačke na duži AB)

Pretpostavka da duž ima konačno mnogo tački nas je dovela u kontradikciju pa nije tačna.

Duž AB ima ∞ mnogo tački.

q.e.d.

(#) (Pašova teorema) Prava p pripada ravni koja je određena nekolinearnim tačkama A, B, C i ne sadrži nijednu od tih tačaka. Ako pri tom prava siječe pravu $p(A,B)$ između tačaka A i B tada ona siječe ili pravu $p(B,C)$ između tačaka B i C ili pravu $p(A,C)$ između tačaka A i C.

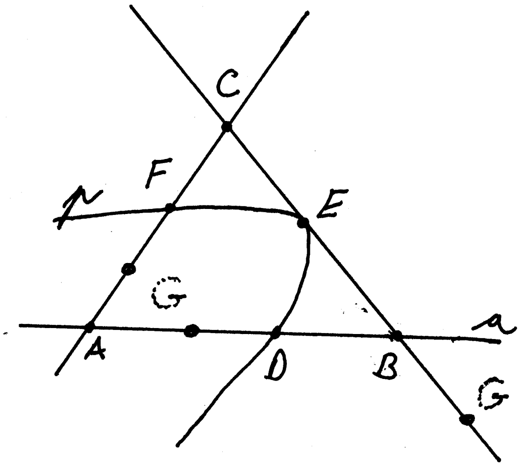
Rj. postavka zadatka

$$\left.\begin{array}{l} A, B, C \text{ nekolinearne tačke} \\ p \text{ pripada ravni } ABC \\ A, B, C \notin p, \quad A-p-B \end{array}\right\} \Longrightarrow B-p-C \ \veebar \ A-p-C$$

$$\begin{array}{lll} A-p-B & \Rightarrow \exists D \in p: & A-D-B \\ B-p-C & \Rightarrow \exists E \in p: & B-E-C \\ A-p-C & \Rightarrow \exists F \in p: & A-F-C \end{array}$$

Na osnovu Pašove aksiome dovoljno je pokazati da obe tvrdnje ne mogu vrijediti istovremeno.

Pretpostavimo suprotnu tvrdnji tj. pretpostavimo da je istovremeno i $B-p-C$ i $A-p-C$. Bez ograničenja pretpostavimo da vrijedi $D-E-F$.



Označimo sa $a = p(A,B)$.
Tačke A, D i F su nekolinearne (u suprotnom bi imali

$$\left.\begin{array}{l} A-D-F \\ A-D-B \\ A-F-C \end{array}\right\} \xRightarrow{I_1, I_2} A, B, C \in a$$

#kontradikcija (A, B, C nekolinearne))

$$\left.\begin{array}{l} A, D, F \text{ nekolinearne tač.} \\ p(B,C) \text{ nije incidentna ni sa jednom od tački } A, D, F \\ p(B,C) \ni E: \ D-E-F \end{array}\right\} \xRightarrow{II_4} \begin{array}{l} \exists G \in p(B,C): \\ A-G-D \\ \veebar \ A-G-F \end{array}$$

Ako bi važio poredak $A-G-D$ imali bi

$$\left.\begin{array}{l} A-G-D \\ A-D-B \\ G \in p(B,C) \end{array}\right\} \xRightarrow{I_1, I_2} A, B, C \in a$$

#kontradikcije

Prema tome nije $A-G-D$.

Ako bi važio poredak $A-G-F$ imali bi

$$\left.\begin{array}{l} A-G-F \\ A-F-C \\ G \in p(B,C) \end{array}\right\} \xRightarrow{I_1, I_2} A, B, C \in a$$

#kontradikcije

Prema tome nije $A-G-F$.

Pretpostavka da vrijede obe tvrdnje nas je dovela u kontradikciju pa nije tačna. Prema tome vrijedi tačno jedna od tvrdnji

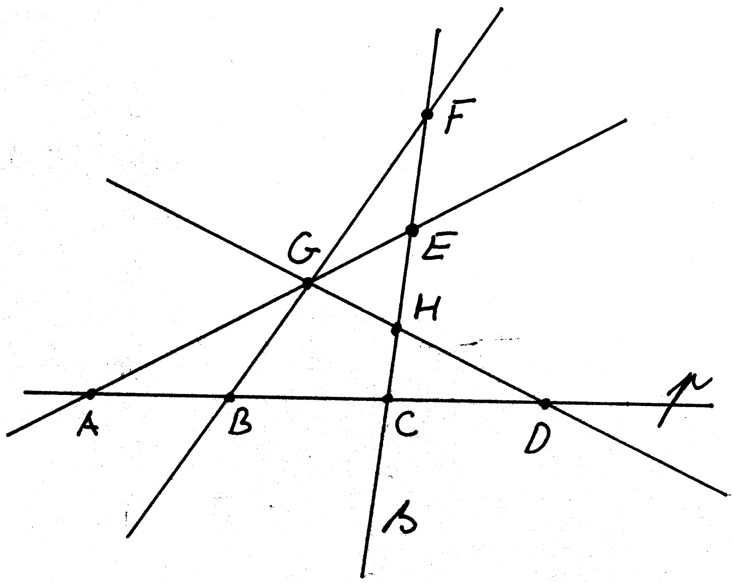
$B-p-C$ ili $A-p-C$ q.e.d.

(#) Date su četri kolinearne tačke A, B, C, D. Isključivo aksiomama incidencije i poretka dokazati da ako je $A-B-C$ i $A-C-D$ tada je $B-C-D$.

Rj. postavka zadatka

$A-B-C$, $A-C-D$ $\Rightarrow$ $B-C-D$.

— — —



Označimo sa p pravu koja je incidentna sa tačkama A, B, C i D.

za p prema I_3 $\exists E: E \notin p$.

za C i E prema II_2 $\exists F: C-E-F$

$\left.\begin{array}{l} A, C, E \text{ nekolinearne tačke} \\ p(B,F) \text{ nije incidentna ni sa jednom od tački } A, C, E \\ B \in p(B,F): A-B-C \end{array}\right\} \overset{II_4}{\Longrightarrow}$

$\overset{II_4}{\Longrightarrow}$ $\exists G \in p(B,F): A-G-E \veebar C-G-E$

Prava $p(B,F)$ ne siječe $p(C,E)$ između C i E zato što tu pravu siječe u tački F $(C-E-F)$. Prema tome $A-G-E$

$\left.\begin{array}{l} B, C, F \text{ nekolinearne tačke} \\ p(A,E) \text{ nije incidentna ni sa jednom od tački } B, C, F \\ p(A,E) \ni E: \ C-E-F \end{array}\right\} \underset{A-B-C}{\overset{II_4}{\Longrightarrow}} B-G-F$

$\left.\begin{array}{l} A, D, G \text{ nekolinearne tačke} \\ p(C,E) \text{ nije incidentna ni sa jednom od tački } A, D, G \\ p(C,E) \ni C: \ A-C-D \end{array}\right\} \overset{II_4}{\Longrightarrow} \exists H \in p(C,E):$

$D-H-G \veebar A-H-G$

Prava $p(C,E)$ ne siječe pravu $p(A,G)$ između tački A i G zato što tu pravu ona siječe u tački E (kako je $A-G-E$). Prema tome imamo $D-H-G$.

Primjetimo da tačke C, H, E, F leže na istoj pravoj (poredak nam nije bitan), koju ćemo označiti sa s.

$$\left.\begin{array}{l} B, D, G \text{ nekolinearne tačke} \\ \text{prava } s \text{ nije incidentna ni sa} \\ \text{jednom od tački } B, D, G. \\ s \ni H:\ D-H-G \end{array}\right\} \xRightarrow{II_4} \begin{array}{l} \text{prava } s \text{ siječe ili} \\ \text{duž } BG \text{ ili duž } BD \end{array}$$

Prava s ne siječe $p(B,G)$ između tački B i G zato što ona tu pravu siječe u F $(B-G-F)$. Prema tome siječe pravu $p(B,D)$ između tački B i D a kako je $p(B,D)=p$ to je poredak $B-C-D$ q.e.d.

(#) Neka je data poluravan α s ivicom u pravoj s i neka su date tačke $S \in s$ i $T \in \alpha$. Dokazati da je poluprava $pp[S,T) \subseteq \alpha$.

Rj. $\alpha = pr[s,T) \wedge S \in s \Rightarrow pp[S,T) \subseteq \alpha$.

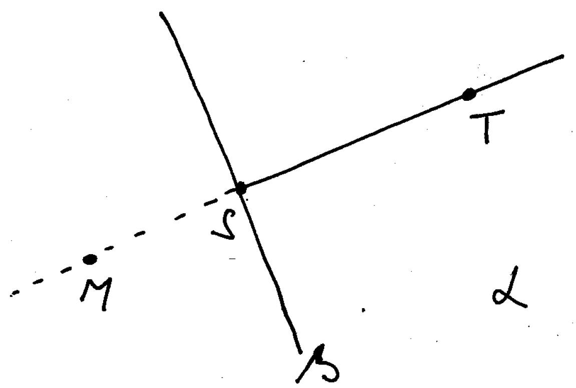
Pretpostavimo suprotno tvrdnji tj: $pp[S,T) \not\subseteq \alpha$

$\Rightarrow \exists M:\ M \in pp[S,T) \wedge M \notin \alpha$

$M \in pp[S,T) \Rightarrow \neg(M-S-T)$

Kako $M \notin \alpha$ i $T \in \alpha$, tačke M i T se nalaze sa suprotne strane prave s $\xRightarrow{II_3}$ $M-S-T$

#kontradikcija (sa $\neg(M-S-T)$)



Pretpostavka da $pp[S,T) \not\subseteq \alpha$ nas je dovela do kontradikcije pa nije tačna.

Prema tome: $pp[S,T) \subseteq \alpha$

q.e.d.

6. Prava koja pripada ravni nekog trougla i prolazi kroz jednu njegovu unutrašnju tačku ima sa tim trouglom tačno dvije zajedničke tačke. Dokazati.

Rj.

$$\left.\begin{array}{l} \triangle ABC \subseteq \alpha \\ p \subseteq \alpha \\ p \ni M: M \in \text{unutr. } \triangle ABC \end{array}\right\} \Rightarrow \exists P, Q: \ P, Q \in p \ \wedge \ P, Q \in \triangle ABC$$

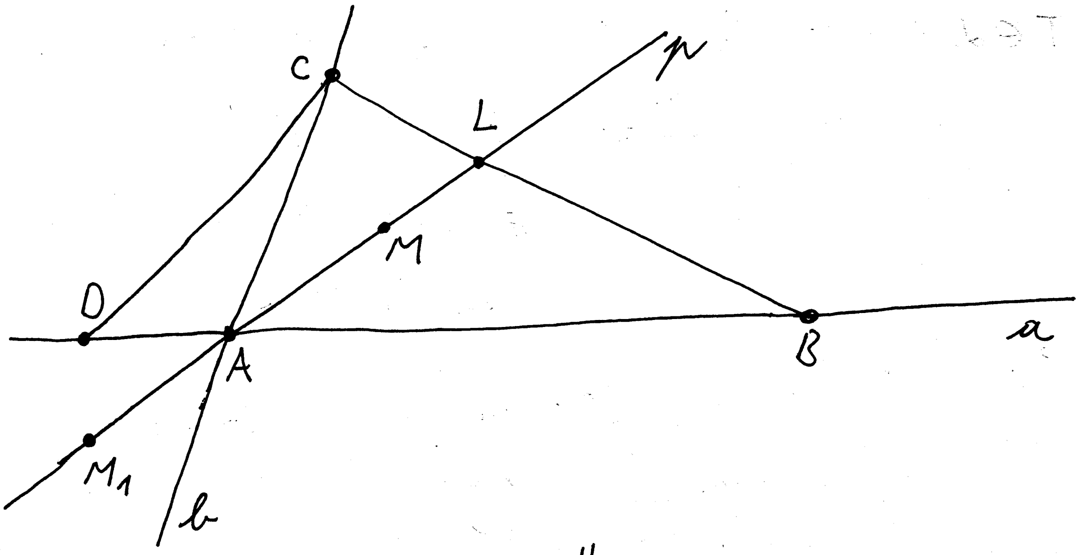
Riješimo zadatak u specijalnom slučaju tj. riješimo zadatak:

Prava koja pripada ravni nekog trougla, i koja prolazi kroz vrh trougla i jednu njegovu unutrašnju tačka ima sa tim trouglom još samo jednu zajedničku tačku.

$$\left.\begin{array}{l} p, \triangle ABC \subseteq \alpha \\ A \in p \\ p \ni M: M \in \text{unutr. } \triangle ABC \end{array}\right\} \Rightarrow \exists L: \ L \in p \ \wedge \ L \in \triangle ABC$$

Nacrtajmo sliku.

Za tačke $B, A \overset{II_2}{\Longrightarrow} \exists O: \ B-A-O$



Za tačke $M, A \overset{II_2}{\Longrightarrow} \exists M_1 : M-A-M_1$

$$\left.\begin{array}{l} B, D, C \text{ nekolinearne tačke} \\ p \text{ nije incidentna } B, D, C \\ p \ni A : B-A-D \end{array}\right\} \overset{II_4}{\Longrightarrow} \begin{array}{l} \exists L : L \in p \\ B-L-C \ \veebar \ D-L-C . \end{array}$$

Pokažimo da ne vrijedi $D-L-C$.

Uvedimo oznake: $a = p(B, D)$
$b = p(A, C)$

Posmatrajmo dvije različite poluravni: $pr[a, C)$ i $pr[a, M_1)$. Prema prethodnom zadatku:

$$pp[A, M_1) \subseteq pr[a, M_1) \quad \ldots (1)$$

$$pp[D, C) \subseteq pr[a, C) \quad \ldots (2)$$

Poluravni $pr[a, C)$ i $pr[a, M_1)$ su različite zato što iz poretka $M-A-M_1$ zaključujemo da je $M_1 \in$ vanjske obl. ΔABC a s druge strane $C \in \Delta ABC$.

Iz (1) i (2) $\Rightarrow pp[A, M_1) \cap DC = \emptyset$.

Posmatrajmo sad $pr[b, D)$ i $pr[b, M)$. Ovo su dvije različite poluravni. Zašto?
($M \in$ unutr. obl. ΔABC a iz $B-A-D \Rightarrow D \in$ vanjsk. obl. ΔABC)

Prema prethodnom zadatku:

$$\left.\begin{array}{l} pp[C,O) \subseteq pr[b,O) \\ pp[A,M] \subseteq pr[b,M) \end{array}\right\} \Rightarrow pp[A,M] \cap CO = \emptyset$$

Kako je $p = pp[A,M) \cup pp[A,M_1) \Rightarrow p \cap CO = \emptyset$

$$\Downarrow$$

$$\neg(O-L-C)$$

Prema tome mora biti $B-L-C$.

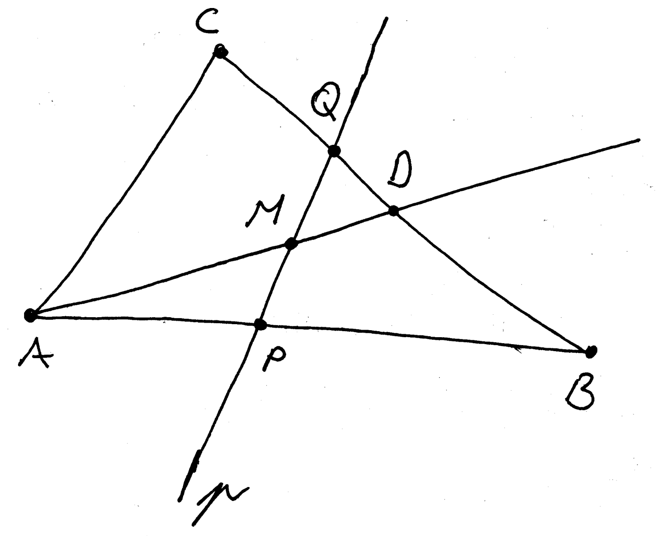
q.e.d.

Vratimo se na zadatak.

Neka je p, $\triangle ABC \subseteq \alpha$ i $p \ni M$: $M \in$ unutr. $\triangle ABC$.

Prema specijalnom slučaju $pp[A,M) \cap BC = \{D\}$:

$B-D-C$.



$$\left.\begin{array}{l} A, B, D \text{ nekolinearne tačke} \\ p \text{ nije incidentna ni} \\ \quad \text{sa jednom od tački } A, B, D \\ p \ni M:\ A-M-D \end{array}\right\} \xRightarrow{II_4} \exists P: \; A-P-B \;\veebar\; B-P-D$$

(Pitanje: Zašto je poredak $A-M-D$?)

$$\left.\begin{array}{l} A, D, C \text{ nekolinearne tačke} \\ p \text{ nije incidentna ni} \\ \quad \text{sa jednom od tački } A, D, C \\ p \ni M:\ A-M-D \end{array}\right\} \xRightarrow{II_4} \exists Q: \; A-Q-C \;\veebar\; D-Q-C$$

Ako bi istovremeno vrijedilo $B-P-D$ i $D-Q-C$ tad bi imali:

$$\left.\begin{array}{l} B-D-C \\ B-P-D \\ D-Q-C \end{array}\right\} \xrightarrow{I_1,\, I_2} p \equiv p(B,C)$$

$$\Downarrow$$

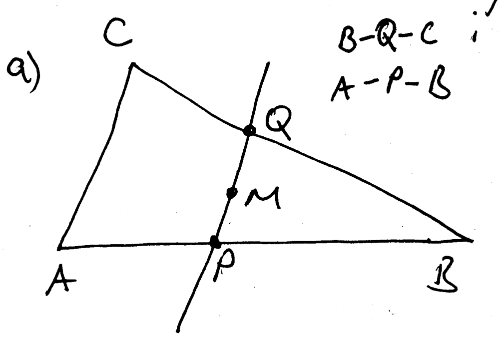
$$M \in p(B,C) \quad \# \text{ kontradikcija}$$

$(M \in$ unutraš. obl. $\Delta ABC)$

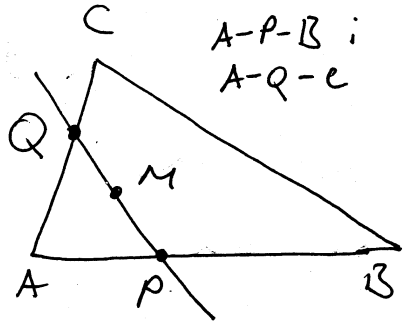
Prema tome ne može istovremeno vrijediti $B-P-C$ i $D-Q-C$.

Preostala tri slučaja:

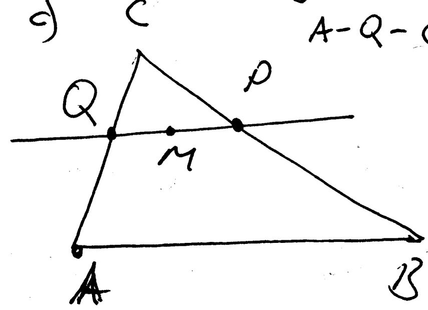
a) $B-Q-C$ i $A-P-B$



b) $A-P-B$ i $A-Q-C$



c) $B-P-C$ i $A-Q-C$

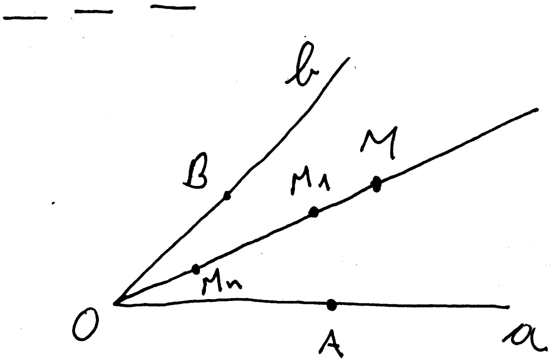


su mogući slučaji i nisu u kontradikciji. Iz bilo kojeg od njih vidimo da prava p ima sa ΔABC tačno dvije zajedničke tačke.

q. e. d.

7. Dat je ugao $\sphericalangle aOb$ i tačka M unutar tog ugla. Dokazati da poluprava $pp[O,M)$ siječe svaku duž AB gdje je $A \in a$ i $B \in b$.

Rj. $\sphericalangle aOb \wedge M \in$ unutr. $\sphericalangle aOb \Rightarrow \forall (A \in a)\ \forall (B \in b)\ pp[O,M) \cap AB \neq \emptyset$



Nacrtajmo sliku.
Uzmimo proizvoljne $A \in a$ i $B \in b$.
Mogu se desiti tri slučaja:

1° $M \in$ unutr. ΔABC
(ovo znači da nisu mogući slučaji $M \in AB \vee M \in OA \vee M \in OB$)

2° $M \in \Delta ABC$ (ovo znači da je tačno jedan od slučajeva $M \in AB \vee M \in OA \vee M \in OB$)

3° $M \in$ vanjsk. ΔOAB

Ako se desi slučaj 1°, prema 6_0 zadatku je

$$pp[O,M) \cap AB \neq \emptyset$$ q.e.d.

Ako je 2° imamo $pp[O,M) \cap AB = \{M\}$ q.e.d.

Pitanje: Zašto za 2° nije moguće $M \in OA \vee M \in OB$?

Razmotrimo slučaj 3°

$$\left.\begin{array}{l} M \in \text{unutr. } \measuredangle aOb \\ M \in \text{vanj. } \triangle OAB \end{array}\right\} \Rightarrow \text{za tačke } O \text{ i } M \text{ prema zadatku } 1_0 \ \exists M_1 : O - M_1 - M$$

Za tačku M_1 moguć je jedan od tri slučaja 1°, 2° i 3°.
Za slučajeve 1° i 2° dokaz je gotov.
Za slučaj 3° bi imali

$$\left.\begin{array}{l} M_1 \in \text{unutr. } \measuredangle aOb \\ M_1 \in \text{vanj. } \triangle OAB \end{array}\right\} \Rightarrow \text{za tačke } O \text{ i } M_1 \text{ prema zadatku } 1_0 \ \exists M_2 : O - M_2 - M_1.$$

Ponavljajući ovaj postupak dobićemo neku tačku M_n "bliža" tački O od tačke M_{n-1} $(M_{n-2}, \dots, M_1, M)$ koja je kolinearna sa tačkama $M_{n-1}, \dots, M$ i za koju vrijedi

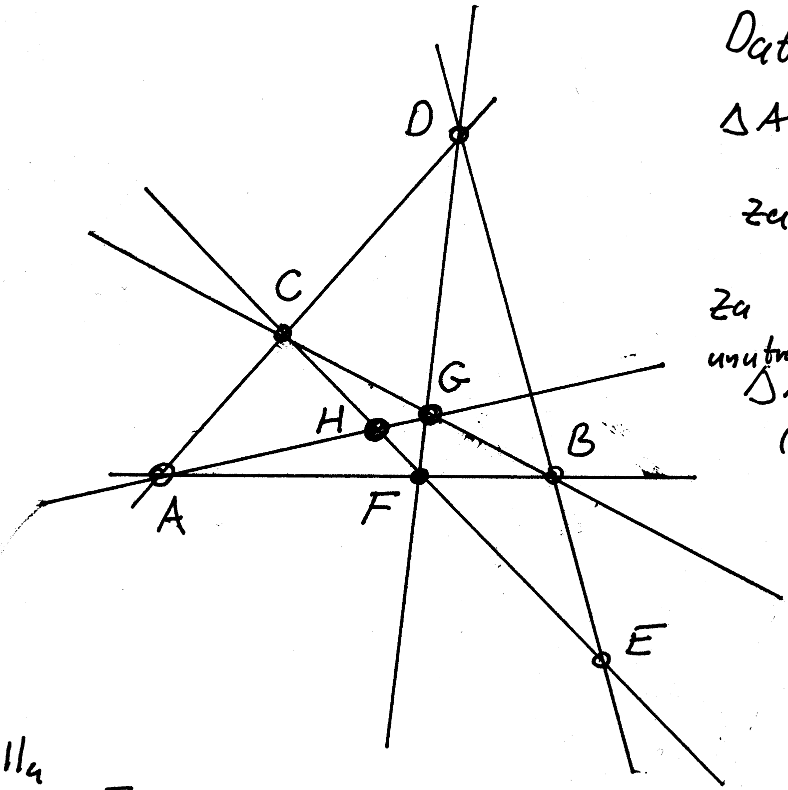
$M \in \text{unutr. } \triangle ABC \vee M \in \triangle ABC.$

$$pp[O, M_n) = pp[O, M_{n-1}) = \dots = p[O,M) \cap AB \neq \emptyset$$ q.e.d.

Isključivo aksiomama incidencije i poretka pokazati da je unutrašnjost trougla neprazan skup.

Rj: postavka zadatka

$\triangle ABC \Rightarrow \exists$ tačka H takva da $H \in$ unutrašnjosti $\triangle ABC$



Date su tačke A, B i C tj. $\triangle ABC$.

za A i C prema II_2 $\exists D: A-C-D$

Za D i B prema II_2 $\exists E: D-B-E$

unutrašnjost $\triangle ABC$ je konveksna figura (dobijena kao presjek tri poluravni)

A, B, D nekolinearne tačke
$p(C,E)$ nije incidentna ni sa jednom od tih tački
$\exists C \in p(C,D)$ takva da $A-C-D$
$\overset{II_4}{\Longrightarrow}$ $\exists F \in p(C,E): A-F-B \veebar B-F-D$.

Prava $p(E,C)$ ne siječe pravu $p(B,D)$ između tački B i D zato što tu pravu ona siječe u tački E (zato što je $D-B-E$). Prema tome $A-F-B$.

A, B, C nekolinearne tačke
$p(F,D)$ nije incidentna ni sa jednom od tački A, B, C
$\exists F \in p(F,D)$ taka $A-F-B$
$\xrightarrow[(A-C-D)]{II_4}$ $\exists G \in p(F,D)$: $C-G-B$

C, F, B nekolinearne tačke
$p(A,G)$ nije incidentna ni sa jednom od tački C, F i B
$\exists G \in p(A,G)$ tako $C-G-B$
$\xrightarrow[(A-F-B)]{II_4}$ $\exists H \in p(A,G)$: $A-H-G$

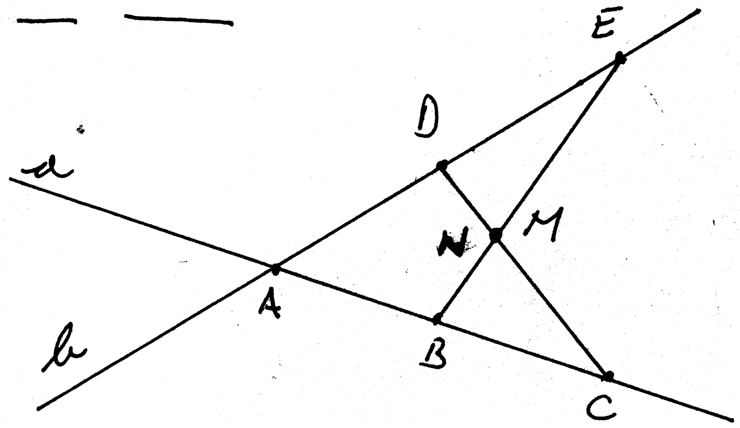
A vrh trougla, $G \in BC$ i $A-H-G$ $\xrightarrow{\triangle ABC \text{ je konveksan}}$ $H \in$ unutr. $\triangle ABC$

q.e.d.

(#) Neka se prave a i b sijeku u tački A i neka je $A-B-C$ na pravoj a, i $A-D-E$ na pravoj b. Isključivo aksiomama incidencije i poretka dokazati da se duž BE mora sijeći sa duži CD u tački M.

Rj. postavka zadatka

$$\left.\begin{array}{l} a, b \text{ prave} \\ a \cap b = \{A\} \\ B, C \in a \quad A-B-C \\ D, E \in b \quad A-D-E \end{array}\right\} \Longrightarrow BE \cap CD = \{M\}.$$



$$\left.\begin{array}{l} A, C, D \text{ nekolinearne tačke} \\ p(B,E) \text{ nije incidentna ni sa jednom od tački } A, C, D \\ \exists \text{ tačka } B \in p(B,E) \text{ takva da } A-B-C \end{array}\right\} \overset{II_4}{\Longrightarrow}$$

$\overset{II_4}{\Longrightarrow} \exists M \in p(B,E)$ takva da ili $A-M-D$ ili $C-M-D$

Prava $p(B,E)$ ne siječe pravu $p(A,D)$ između tački A i D zato što tu pravu ona siječe u tački E ($A-D-E$). Prema tome mora biti $C-M-D$. ($p(B,E) \cap CD = \{M\}$ ...(*))

$$\left.\begin{array}{l} A, B, E \text{ nekolinearne tačke} \\ p(C,D) \text{ nije incidentna ni sa jednom od tački } A, B, E \\ \exists \text{ tačka } D \in p(C,D) \text{ takva da je } A-D-E \end{array}\right\} \overset{II_4}{\Longrightarrow} \exists N \in p(C,D) \text{ takva da ili } A-N-B \text{ ili } B-N-E$$

Prava $p(C,D)$ ne siječe pravu $p(A,B)$ između tački A i B zato što ona tu pravu siječe u tački C (zato što je $A-B-C$). Prema tome mora biti $B-N-E$. ($p(C,D) \cap BE = \{N\}$ ...(**))

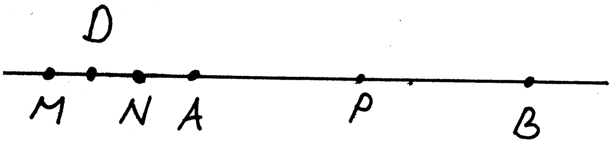
Iz (*) vidimo da $p(B,E) \cap p(C,D) = \{M\}$ a iz (**) vidimo da $p(B,E) \cap p(C,D) = \{N\} \Longrightarrow M \equiv N$.

Sad iz (*) i (**) $\Longrightarrow BE \cap CD = \{M\}$

q.e.d.

(#) Dokazati da svaka tačka prave dijeli tu pravu na dvije konveksne figure (poluprave).

Rj. Neka je data prava p i proizvoljna tačka $P \in p$.



Neka su $A, B \in p$ takve da je poredak $A-P-B$.
Dokažimo da su $pp[P, A)$ i $pp[P, B)$ konveksne figure.

Neka su M i N dvije proizvoljne tačke koje pripadaju $pp[P, A)$. Da bi dokazali da je $pp[P, A)$ konveksna figura potrebno je i dovoljno da pokažemo da je $MN \subseteq pp[P, A)$.

Neka je D proizvoljna tačka duži MN.

Kako je $\left.\begin{array}{l} M-P-B \\ N-P-B \\ M-D-N \end{array}\right\} \Rightarrow D-P-B$

tj. D pripada $pp[P, A)$

Kako je D proizvoljna tačka na MN to

$$MN \subseteq pp[P, A)$$

$\Rightarrow pp[P, A)$ je konveksna figura

g. e. d.

Analogno se pokazuje da je $pp[P, B)$ konveksna figura. Prema tome svaka tačka prave dijeli tu pravu na dvije konveksne figure (poluprave).

g. e. d.

Konveksnost

Figura F je konveksna ako za svake dvije tačke A i B iz F slijedi $\overline{AB} \subseteq F$. Prazan skup ϕ i figura koja se sastoji od samo jedne tačke su konveksne.

Najpoznatije konveksne figure su: prava, poluprava, ravan, poluravan, kružnica, sfera, kocka, paralelogram...

Izlomljena poligonalna linija je unija uzastopnih nadovezanih duži od kojih nijedna od dvije susjedne nadovezane duži ne pripadaju istoj pravoj.

Mnogougao je unija zatvorene poligonalne linije (čije se duži ne sijeku) i njene unutrašnje oblasti.

1° Dokazati da je presjek dvije konveksne figure konveksna figura.

Rj: postavka zadatka

F_1 i F_2 konveksne fig. $\Rightarrow$ $F_1 \cap F_2$ konveksna fig.

Drugim riječima, želimo pokazati da za

$$\forall A, B \in F_1 \cap F_2 \Rightarrow AB \subseteq F_1 \cap F_2$$

$$A, B \in F_1 \cap F_2 \Rightarrow A, B \in F_1 \text{ i } A, B \in F_2$$

Kako su F_1 i F_2 konveksne figure to

$$\left.\begin{array}{l} A, B \in F_1 \Rightarrow AB \in F_1 \\ A, B \in F_2 \Rightarrow AB \in F_2 \end{array}\right\} \Rightarrow AB \in F_1 \cap F_2$$

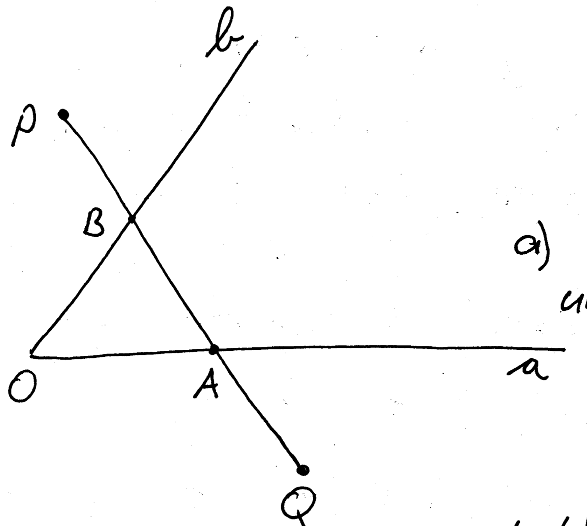
Prema tome, presjek dvije konveksne figure je konv. fig.

q.e.d.

2. Dokazati da je unutrašnja oblast ugla, različitog od ravnog, konveksan skup, dok je spoljašnja oblast tog ugla, nekonveksan skup.

Rj. postavka zadatka

$\measuredangle aOb \neq$ ravnog ugla $\Longrightarrow$ unutr. obl. $\measuredangle aOb$ konv. sk.
vanjsk. obl. $\measuredangle aOb$ nekonv. sk.



Neka je dat $\measuredangle aOb$.
Uzmimo proizvoljne tačke $A \in a$ i $B \in b$

a)

unut. obl. $\measuredangle aOb = pr[a, B) \cap pr[b, A)$

Kako je poluravan konveksan skup a prema prethodnom zadatku presjek dvije konveksne figure je konveksna figura, slijedi unutr. obl. $\measuredangle aOb$ konv. sk.

q.e.d.

b)

za tačke $A, B \overset{II_2}{\Longrightarrow} \exists P: A-B-P$

za $B, A \overset{II_2}{\Longrightarrow} \exists Q: B-A-Q$

Iz $A-B-P$ i $B \in b$ zaključujemo da tačke A i P leže sa različite strane prave b.

Kako $pr[b, A) \supseteq$ unutr. obl. $\measuredangle aOb \Rightarrow P \in$ vanj. obl. $\measuredangle aOb$

Iz $B-A-Q$ i $A \in a$ zaključujemo da tačke B i Q leže sa različite strane prave a.

Kako $pr[a, B) \supseteq$ unutr. obl. $\measuredangle aOb \Rightarrow Q \in$ vanj. obl. $\measuredangle aOb$

$$\left.\begin{array}{l} P, Q \in \text{spoljaš. obl. } \measuredangle aOb \\ \overline{AB} \subseteq \overline{PQ} \\ \overline{AB} \subseteq \text{unutraš. obl. } \measuredangle aOb \end{array}\right\} \Longrightarrow PQ \not\subseteq \text{spoljašnjoj oblasti } \measuredangle aOb$$

$$\Downarrow$$

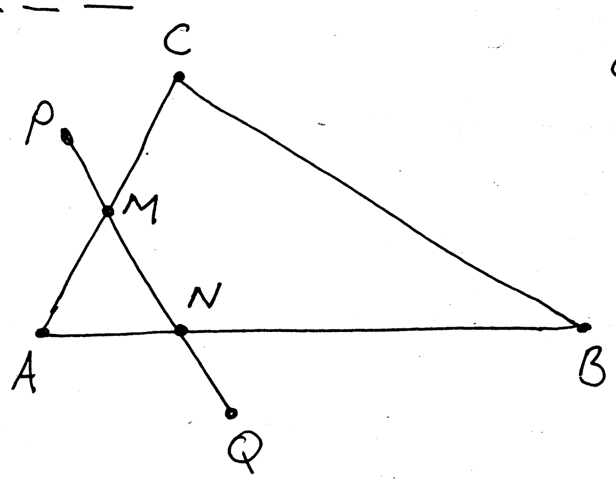
spoljašnja obl. $\measuredangle aOb$ nije konve. sk.

q.e.d.

3. Dokazati da je unutrašnja oblast trougla konveksan skup i da je spoljašnja oblast trougla nekonveksan skup.

Rj. $\triangle ABC \Rightarrow$ unutrašnja oblast $\triangle ABC$ konv. sk.

spolj. obl. $\triangle ABC$ nekonveksan skup



a) Neka je dat $\triangle ABC$. Unutrašnju oblast $\triangle ABC$ možemo tumačiti kao presjek tri poluravni ili kao presjek unutrašnje oblasti dva ugla.

$$\text{unutr. obl. } \triangle ABC = pr[p(A,B), C) \cap pr[p(B,C), A) \cap$$
$$\cap\, pr[p(A,C), B)$$

ili

$$\text{unutr. obl. } \triangle ABC = \text{unutr. obl. } \measuredangle ABC \cap \text{unutr. obl. } \measuredangle BAC$$

I u jednom i u drugom slučaju, prema zadatku 2.

$\Rightarrow$ unutr. obl. $\triangle ABC$ konv. sk.

q.e.d.

b) za tačke A, B prema zadatku 1. $\exists N: A-N-B$

za tačke A, C $\exists M: A-M-C$

za tačke $N, M \xRightarrow{II_2} \exists P: N-M-P$

za $M, N \xRightarrow{II_2} \exists Q: M-N-Q$

Analognim zaključivanjem kao u prethodnom zadatku dobićemo

$$\left.\begin{array}{l} P, Q \in \text{spolj. obl. } \triangle ABC \\ \overline{MN} \subseteq \overline{PQ} \\ \overline{MN} \subseteq \text{unutr. obl. } \triangle ABC \end{array}\right\} \Rightarrow \overline{PQ} \not\subseteq \text{spolj. obl. } \triangle ABC$$

$\Downarrow$

spoljašnja obl. $\triangle ABC$ nekonv. sk.

q.e.d.

4. Dokazati da je mnogougao konveksan ako i samo ako se svi vrhovi mnogougla nalaze u istoj poluravni određenoj pravom koja sadrži ma koju stranicu tog mnogougla.

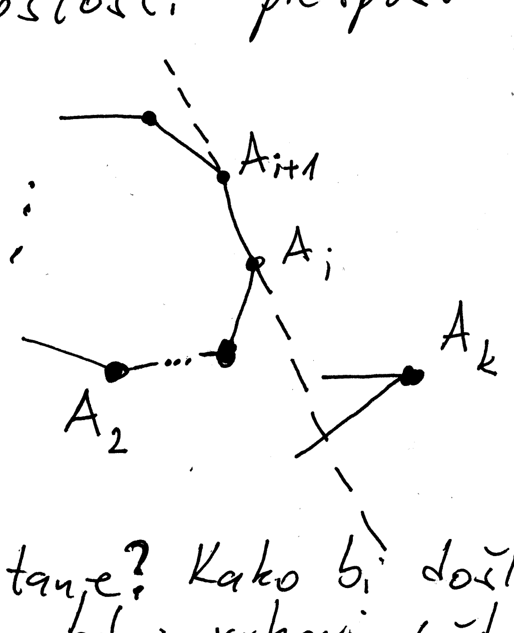
Rj. postavka zadatka:

mnogougao konveksan $\Leftrightarrow$ svi vrhovi mnogougla se nalaze u istoj poluravni određenoj pravom koja sadrži ma koju stranicu tog mnogougla

---

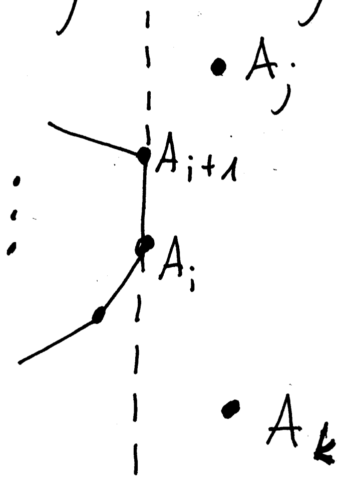
potreban uslov „$\Leftarrow$": mnogougao konveksan $\Rightarrow$ svi vrh. mn. se nal. u ist. pol. odr. pr. koj. sadr. ma koju str. tog mn.

Neka je dat mnogougao $A_1A_2\ldots A_n$ $(n \geq 6)$. Pretpostavimo suprotno tvrdnji tj. pretpostavimo da postoji bar jedan vrh A_k (k fiksirano) koji se ne nalazi u istoj poluravni (određenoj pravom $p(A_i, A_{i+1})$ (i fiksirano) koja sadrži stranicu A_iA_{i+1} tog mnogougla) u kojoj se nalaze svi ostali vrhovi mnogougla. Bez ograničenja opštosti pretpostavimo da je $k<i<i+1\neq n$. Neka je A_k jedini vrh koji nije u istoj poluravni u kojoj su svi ostali vrhovi. Tada je A_kA_{i+1} stranica mnogougla $(i+1\neq n)$. # kontradikcija (A_k i A_{i+1} nisu susjedni vrhovi pa duž A_kA_{i+1} može biti samo dijagonala mnogougla).



Pitanje? Kako bi došli do kontradikcije da su A_k i A_{i+1} susjedni vrhovi (što je moguće u slučaju $A_1=A_k$ i $A_n=A_{i+1}$).

Pretpostavimo da pored vrha A_k postoji još jedan vrh (ili više njih) koji nije u istoj poluravni u kojoj su svi ostali vrhovi mnogougla. Neka je A_j (j fiksirano) prvi vrh sa iste strane prave $p(A_i A_{i+1})$ sa koje je vrh A_k tako da je $i+1<j$. Tada su mogući sljedeći slučajevi:



1° $A_k A_j$ stranica mnogougla
\# kontradikcija

2° $A_k A_j$ siječe neku od stranica mnogougla
\# kontradikcija
(mnogougao konveksan)

3° $A_k A_j$ dijagonala mnogougla $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ $A_i A_{i+1}$ dijagonala mnogougla
\# kontradikcija

Pitanje? Kako bi došli do kontradikcije da ne postoji vrh A_j sa navedenim osobinama.

Pretpostavka suprotna tvrdnji nas vodi u kontradikciju pa nije tačna. Prema tome svi vrhovi mnogougla se nalaze u istoj poluravni određenoj pravom koja sadrži ma koju stranicu tog mnogougla.

q.e.d.

---

dovoljan uslov
" $\Rightarrow$ ":

vrhovi mnogougla se nalaze u istoj poluravni određenoj pravom koja sadrži ma koju stranicu tog mnogougla $\Bigg\} \Rightarrow$ mnogougao konveksan

---

Posmatrajmo presjek svih poluravni čije ivice sadrže jednu stranicu mnogougla. Ovaj presjek sadrži sve vrhove mnogougla (svaka poluravan sadrži sve vrhove) i jednaka je unutrašnjoj oblasti mnogougla. Kako je poluravan konveksan skup to je i presjek svih poluravni konveksan skup

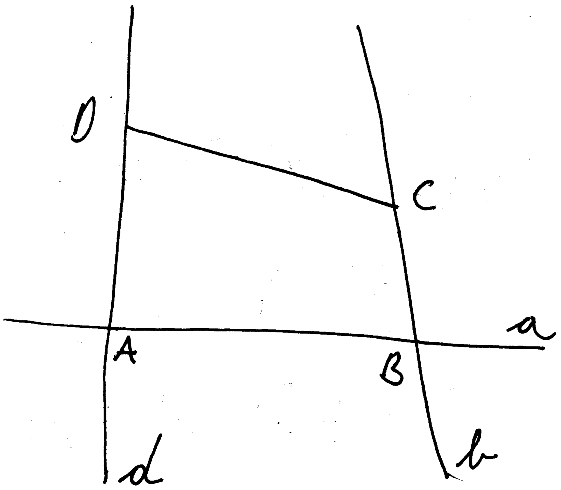
$\Rightarrow$ mnogougao je konveksan skup

q.e.d.

(5.) Četverougao je konveksan ako i samo ako mu se dijagonale sijeku.

Rj. potreban uslov "$\Rightarrow$" : četverougao konveksan $\Rightarrow$ dijagonale mu se sijeku

Neka je dat konveksan četverougao $\square ABCD$.



Uvedimo oznake

$a = p(A,B)$; $b = p(B,C)$;

$d = p(A,D)$.

Iz prethodnog zadatka znamo da svi vrhovi četverougla se nalaze u istoj poluravni određenu pravom koja sadrži ma koju stranicu četverougla.

$$\sphericalangle BAD = pr[a, C) \cap pr[d, C)$$

$$\Downarrow$$

$$C \in \text{unutr. } \sphericalangle BAD \xRightarrow{\text{prema zadatku 7.}} p(A,C) \cap BD \neq \emptyset$$

$$\sphericalangle ABC = pr[a, D) \cap pr[b, D)$$

$$\Downarrow$$

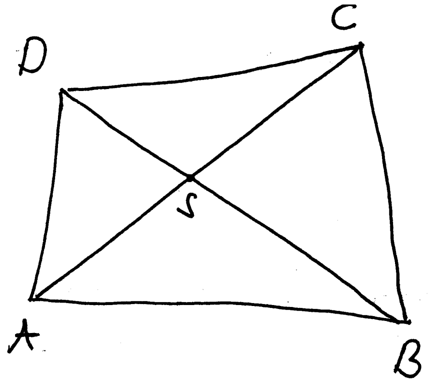
$$D \in \text{unutr. } \sphericalangle ABC \xRightarrow{\text{prema zadatku 7.}} p(B,D) \cap AC \neq \emptyset$$

$$\left.\begin{array}{l} p(A,C) \cap BD \neq \emptyset \\ p(B,D) \cap AC \neq \emptyset \end{array}\right\} \Rightarrow AC \cap BD \neq \emptyset \Rightarrow \text{dijagonale se sijeku}$$

q.e.d.

dovoljan uslov "$\Leftarrow$" : dijagonale četverougla se sijeku $\Rightarrow$ četver. konveks.

Neka je dat četverougao $\square ABCD$ takav da $AC \cap BD \neq \emptyset$.



Dokazaću da se svi vrhovi četverougla nalaze u istoj poluravni određenu pravom koja sadrži ma koju stranicu četverougla.

$AC \cap BD = \{S\}: \quad A-S-C \;\wedge\; B-S-D$

Posmatrajmo poluravan $pr[p(A,B), S)$

$$\left.\begin{array}{c} pr[p(A,B), S) \\ A \in p(A,B) \end{array}\right\} \xRightarrow[\text{iz Aksioma poretka}]{\text{prema zadatku } 5_0} pp[A,S) \subseteq pr[p(A,B),S)$$

$$\Big\Downarrow \text{ kako je } A-S-C$$

$$C \in pr[p(A,B), S)$$

$$\left.\begin{array}{c} pr[p(A,B), S) \\ B \in p(A,B) \end{array}\right\} \xRightarrow[\text{iz Aksioma poretka}]{\text{prema zadatku } 5_0} pp[B,S) \subseteq pr[p(A,B), S)$$

$$\Big\Downarrow \text{ kako je } B-S-D$$

$$D \in pr[p(A,B), S)$$

Time smo pokazali da tačke C i D leže u istoj poluravni čija je ivica prava koja sadrži stranicu AB četverougla.

Ponavljajući sličan postupak dobijamo:

$$A, D \in pr[p(B,C), S)$$
$$A, B \in pr[p(C,D), S)$$
$$B, C \in pr[p(A,D), S)\,.$$

$\Rightarrow \square ABCD$ ispunjava uslove 4 zadatka

$\Rightarrow \square ABCD$ je konveksan

q.e.d.

(6.) Dokazati da je četverougao konveksan ako i samo ako svaka duž MN pri čemu $M \in AB$, $N \in CD$ siječe njegove dijagonale.

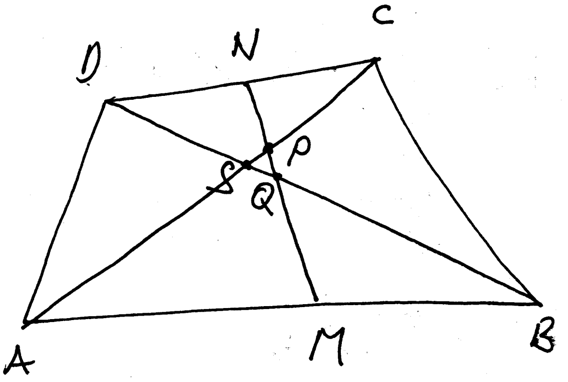
Rj.

potreban uslov

"$\Rightarrow$": četv. $\square ABCD$ konveksan $\Rightarrow \forall M \in \overline{AB} \wedge \forall N \in \overline{CD}$

$$(\overline{MN} \cap \overline{AC} \neq \emptyset \wedge \overline{MN} \cap \overline{BD} \neq \emptyset)$$

AC i BD dijagonale četverougla



Nacrtajmo sliku.

$\square ABCD$ konv. $\Rightarrow AC \cap BD = \{S\}$:

$A - S - C$ i $B - S - D$

$M \in \overline{AB} \Rightarrow A - M - B$

$N \in \overline{CD} \Rightarrow C - N - D$

Kako je poredak $A-M-B$ i $C-N-D$ tačke C i D i tačke A i B leže sa različitih strana prave $p(M,N)$.

Pa moguća su dva slučaja:

1° A i C leže u jednoj a B i D u drugoj poluravni sa ivicom u $p(M,N)$

2° A i D leže u jednoj a B i C u drugoj poluravni sa ivicom u $p(M,N)$

Ako bi bio 1° $\Rightarrow AC \cap BD = \emptyset$ # kontradikcija $(AC \cap BD = \{S\})$

Ne može nastupiti 1°

Važi 2°. A i D leže u jednoj a B i C u drugoj poluravni pa $\overline{AC} \cap p(M,N) \neq \emptyset$

i $\overline{BD} \cap p(M,N) \neq \emptyset$.

Ove dvije činjenice ćemo iskoristiti kasnije.

Iz poretka $A-S-C$ i $B-S-D$ zaključujemo da tačke B i D leže sa različitih strana $p(A,C)$

$$\left.\begin{array}{l} pr[p(A,C), D) \\ C \in p(A,C) \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{poretka}]{\substack{\text{prema zadatku} \\ \text{5. iz Aksioma}}} pp[C, D) \subseteq pr[p(A,C), D)$$

$\Downarrow$ kako je poredak $C-N-D$

$$N \in pr[p(A,C), D)$$

$$\left.\begin{array}{l} pr[p(A,C), B) \\ A \in p(A,C) \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{poretka}]{\substack{\text{prema zadatku} \\ \text{5. iz Aksioma}}} pp[A, B) \subseteq pr[p(A,C), B)$$

$\Downarrow$ kako je poredak $A-M-B$

$$M \in pr[p(A,C), B)$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{poluravni } pr[p(A,C), B) \text{ i} \\ pr[p(A,C), D) \text{ su dvije} \\ \text{različite poluravni sa} \\ \text{istom ivicom} \\ N \in pr[p(A,C), D) \\ M \in pr[p(A,C), B) \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} M \text{ i } N \text{ leže sa} \\ \text{različitih strana} \\ \text{prave } p(A,C) \text{ tj.} \\ p(A,C) \cap \overline{MN} \neq \emptyset \end{array}$$

Dobio sam

$$\left.\begin{array}{l} p(M,N) \cap \overline{AC} \neq \emptyset \\ p(A,C) \cap \overline{MN} \neq \emptyset \end{array}\right\} \Longrightarrow \overline{AC} \cap \overline{MN} \neq \emptyset$$

Na isti način ću pokazati da je $\overline{MN} \cap \overline{BD} \neq \emptyset$.

Iz poretka $A-S-C$ i $B-S-D$ zaključujemo da tačke A i C leže sa različitih strana $p(B,D)$.

Prema zadatku 5. iz Aksioma poretka $pp[B, A)$ i pp $[D,B)$ leže u različitim poluravnima sa ivicom p(B,D) i kako je $M \in$ pp$[B,A)$ i $N \in$ pp$[D,B)$ to tačke M i N leže sa različite strane prave p(B,D)

$$\Rightarrow p(B,D) \cap \overline{MN} \neq \emptyset$$

Dobili smo

$$\left.\begin{array}{l} p(M,N) \cap \overline{BD} \neq \emptyset \\ p(B,D) \cap \overline{MN} \neq \emptyset \end{array}\right\} \Longrightarrow \overline{MN} \cap \overline{BD} \neq \emptyset$$

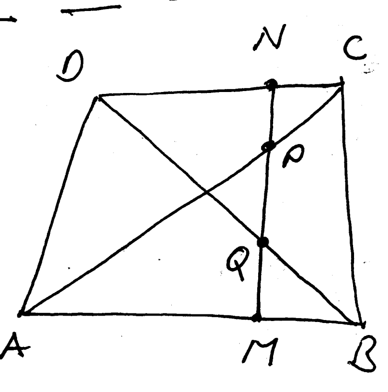
Prema tome: $\overline{AC} \cap \overline{MN} \neq 0$ i $\overline{MN} \cap \overline{BD} \neq \emptyset$

q. e. d.

dovoljan uslov

"$\Leftarrow$": svaka duž $\overline{MN}$ pri čemu je $M \in \overline{AB}$ i $N \in \overline{CD}$ siječe dijagonale $\square ABCD$ $\Longrightarrow$ $\square ABCD$ konveksan

— — —



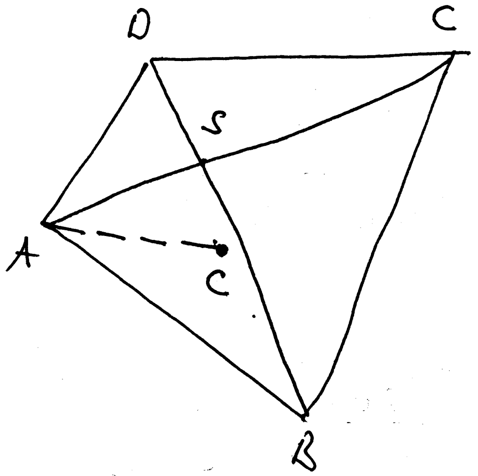
Dovoljan uslov ostavljamo studentu za vježbu.
Ideja je u tome da posmatramo četri poluravni koje su određene pravama koje sadrže redom $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ i $\overline{AD}$ stranice četverougla.
Iz poznatog poretka ćemo zaključiti da se vrhovi mnogougla nalaze u tim poluravnima pa prema zadatku 4. $\Rightarrow$ $\square ABCD$ konveksan

q. e. d.

(7.) Dokazati da je četverougao konveksan ako i samo ako svaki vrh četverougla leži u spoljašnjoj oblasti trougla kojeg obrazuju ostala tri vrha četverougla.

Rj. potreban uslov

" $\Rightarrow$ ": četverougao konveksan $\Rightarrow$ svaki vrh četverougla leži u spoljašnjoj oblasti trougla kojeg obrazuju ostala tri vrha četverougla



$\square ABCD$ konveksan

$\Downarrow$

$AC \wedge BD = \{S\}$

Pretpostavimo suprotno tvrdnji tj. pretpostavimo da postoji vrh četver. koji leži u unutrašnjosti trougla kojeg obrazuju ostala tri vrha i neka je to vrh C.

$C \in$ unutr. $\triangle ABD \Longrightarrow AC \wedge BD = \emptyset$

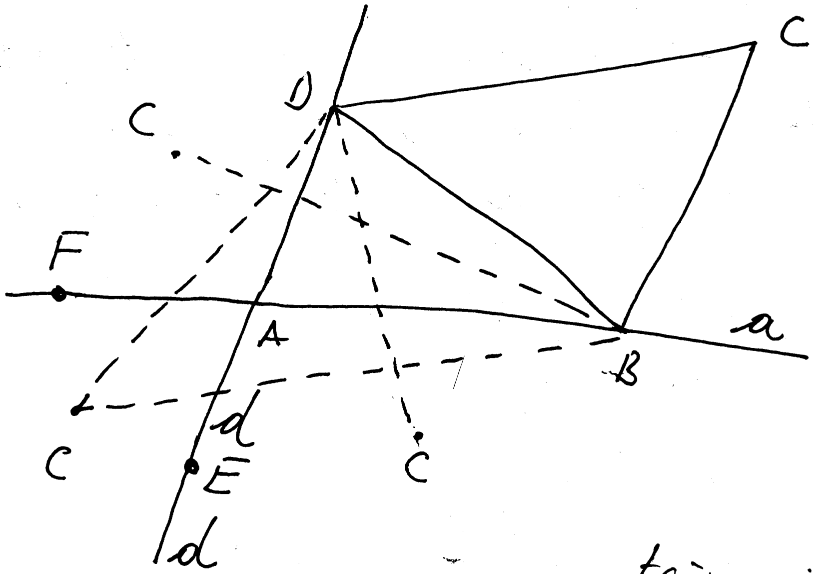
\# kontradikcija
$(AC \wedge BD \neq \emptyset)$

Pretpostavka suprotna tvrdnji nas je dovela u kontradikciju pa nije tačna. Prema tome:
svaki vrh četver. leži u spolj. obl. tr. kojeg obr. ost. tri vrha četverougla. q. e. d.

dovoljan uslov

" $\Leftarrow$ ": svaki vrh četverougla leži u spoljašnjoj oblasti $\triangle$ kojeg obrazuju ostala tri vrha četverougla $\Rightarrow$ četverougao konveksan

Pretpostavimo suprotno tvrdnji, tj. pretpostavimo da dati četverougao $\square ABCD$ nije konveksan.
To znači da mu se dijagonale $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$ ne sijeku



Uvedimo oznake

$a = p(A;B)$; $d = p(A,D)$

$E: D-A-E$; $F: B-A-F$

Kako tačka C leži u spoljašnjoj oblasti $\triangle ABD$ moguć je tačno jedan od sljedeća tri slučaja:

1° $C \in \mathrm{pr}[a, E) \cap \mathrm{pr}[d, B)$

2° $C \in \mathrm{pr}[a, E) \cap \mathrm{pr}[d, F)$

3° $C \in \mathrm{pr}[a, D) \cap \mathrm{pr}[d, F)$

Pitanje: Zašto ne razmatramo slučaj

$C \in \mathrm{pr}[a, D) \cap \mathrm{pr}[d, B)$?

Da ne vrijede 2° i 3° slučaj ostavljamo za vježbu.
Pokazaćemo da ne vrijedi 1°.
Ako bi bilo $C \in \mathrm{pr}[a, E] \cap \mathrm{pr}[d, B]$, kako C leži u spoljšnjoj oblasti $\triangle ABD \Rightarrow AB \cap CD \neq \emptyset$

kontradikcija (stranice u četverouglu se ne sijeku)

Prema tome nije 1°, 2° i 3°.
Pretpostavka da četverougao $\square ABCD$ nije konveksan nas dovodi u kontradikcije pa ta tvrdnja nije tačna.

Četverougao $\square ABCD$ jest konveksan

q.e.d.

8. Date su četri konveksne figure u ravni takve da svake tri od njih imaju jednu zajednička tačka. Dokazati da sve četri date figure imaju zajednička tačka.

Rj: postavka zadatka u obliku implikacije

$$\left.\begin{array}{l} \alpha \text{ ravan} \\ F_1, F_2, F_3, F_4 \text{ konveksne figure} \\ F_1, F_2, F_3, F_4 \subseteq \alpha \\ \exists A: A \in F_1 \cap F_2 \cap F_3 \;;\; \exists B: B \in F_1 \cap F_2 \cap F_4 \\ \exists C: C \in F_1 \cap F_3 \cap F_4 \;;\; \exists D: D \in F_2 \cap F_3 \cap F_4 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \exists E: \\ E \in F_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap F_4 \end{array}$$

F_1, F_2, F_3 i F_4 konveksne figure

$A \in F_1 \cap F_2 \cap F_3 \Rightarrow A \in F_1 \wedge \underline{A \in F_2} \wedge \underline{\underline{A \in F_3}}$

$B \in F_1 \cap F_2 \cap F_4 \Rightarrow B \in F_1 \wedge \underline{B \in F_2} \wedge B \in F_4$

$C \in F_1 \cap F_3 \cap F_4 \Rightarrow C \in F_1 \wedge \underline{\underline{C \in F_3}} \wedge C \in F_4$

$D \in F_2 \cap F_3 \cap F_4 \Rightarrow \underline{D \in F_2} \wedge \underline{\underline{D \in F_3}} \wedge D \in F_4$

F_1 konv. fig., $A \in F_1$, $B \in F_1$, $C \in F_1$ $\Rightarrow \triangle ABC \subseteq F_1$

F_2 konv. fig., $A \in F_2$, $B \in F_2$, $D \in F_2$ $\Rightarrow \triangle ABD \subseteq F_2$

F_3 konv. fig., $A \in F_3$, $C \in F_3$, $D \in F_3$ $\Rightarrow \triangle ACD \subseteq F_3$

F_4 konv. fig., $B \in F_4$, $C \in F_4$, $D \in F_4$ $\Rightarrow \triangle BCD \subseteq F_4$

Razmotrimo sve moguće slučajeve:

1° Neke od dvije tačke A, B, C, D se poklapaju

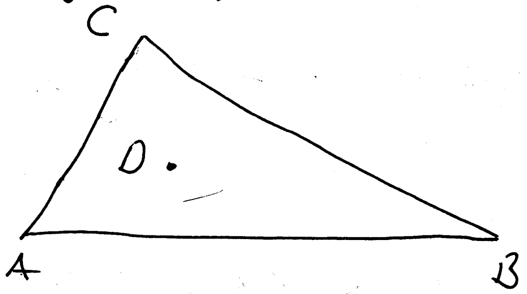
2° Sve četri tačke A, B, C, D su različite

a) među tačkama postoje tri kolinearne
b) među tačkama A, B, C, D ne postoje tri kolinearne
I jedna od njih leži u unutrašnjosti trougla koje obrazuju ostale tri tačke
II svaka tačka leži u spoljašnjoj oblasti trougla kojeg obrazuju ostale tri tačke.

Za slučaj $1°$:
Neka se poklapaju tačke npr. A i D tj. $A \equiv D$. Tada:
$A \in F_1$, $A \in F_2$, $A \in F_3$, $A \equiv D \in F_4 \Rightarrow A \in F_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap F_4$
q.e.d.

Za slučaj $2°$ a):
Neka su npr. kolinearne tačke A, B i C čiji je poredak $A-B-C$.
$\overline{AC} \subseteq F_1$, $\overline{AC} \subseteq F_3$, $A-B-C \Rightarrow B \in AC \subseteq F_1 \cap F_3$
$B \in F_2$, $B \in F_4$, $B \in F_3 \cap F_1 \Rightarrow B \in F_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap F_4$
q.e.d.

Za slučaj $2°$ b) I:
Pretpostavimo npr. da tačka D leži u unutrašnjosti trougla kojeg obrazuju tačke A, B, C.

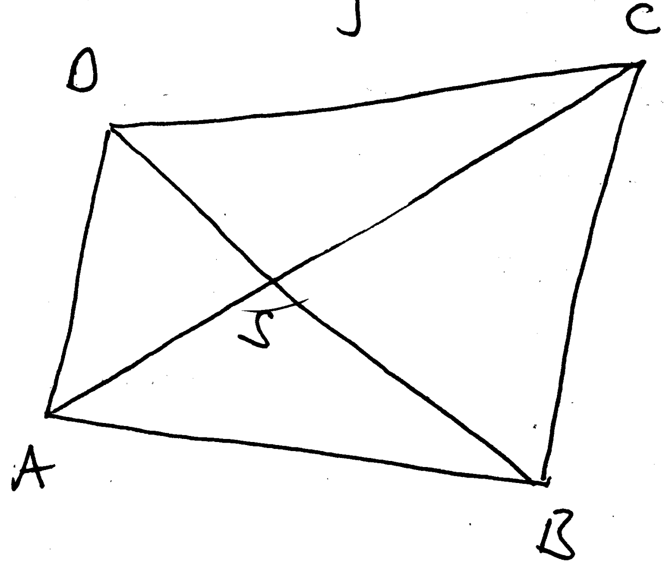


$\Delta ABC \subseteq F_1$ i $D \in$ unutr. ΔABC
$\Rightarrow D \in F_1$

$D \in F_1, D \in F_2, D \in F_3, D \in F_4 \Rightarrow$
$D \in F_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap F_4$
q.e.d.

Za slučaj $2°$ b) II:
Svaka tačka leži u spoljašnjoj oblasti trougla kojeg obrazuju ostale tri tačke. Iz ove činjenice prema

prethodnom zadatku tačke A, B, C i D su tjemena konveksnog četverougla.



$\square ABCD$ konveksan

$$\Downarrow$$

$$\overline{AC} \cap \overline{BD} = \{S\}$$

$$\left.\begin{aligned} \overline{AC} \subseteq F_1, \ \overline{AC} \subseteq F_3 \ &\Rightarrow \ \overline{AC} \subseteq F_1 \cap F_3 \\ \overline{BD} \subseteq F_2, \ \overline{BD} \subseteq F_4 \ &\Rightarrow \ \overline{BD} \subseteq F_2 \cap F_4 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overline{AC} \cap \overline{BD} \subseteq F_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap F_4$$

$$\Downarrow$$

$$S \in F_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap F_4$$

q.e.d.

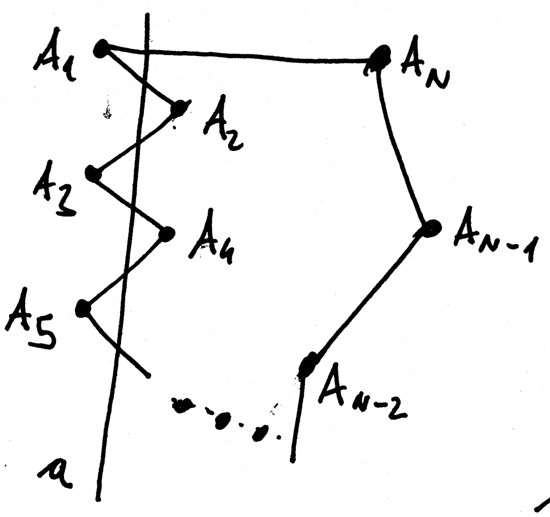
U svim mogućim slučajevima date figure imaju zajedničku tačka

q.e.d.

(#) Dokazati da prava ne može sjeći sve stranice mnogougla sa neparnim brojem stranica.

Rj. Neka je dat mnogougao $A_1A_2A_3\ldots A_N$ (koji ima neparan broj stranica, time i neparan broj vrhova). N - neparan broj.

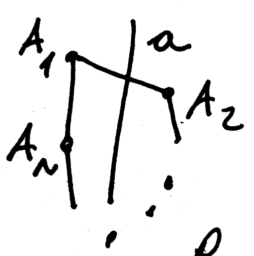
Pretpostavimo suprotno tvrdnji tj. pretpostavimo da postoji prava koja siječe sve stranice ovog mnogougla.



Posmatrajmo $\triangle A_1A_2A_3$. Kako prava a siječe stranicu A_1A_2 i stranicu A_2A_3 to su tačke A_1 i A_3 sa iste strane prave sa koje nije tačka A_2.

Posmatrajmo $\triangle A_2A_3A_4$. Kako prava a siječe stranice A_2A_3 i A_3A_4 to su A_2 i A_4 sa iste strane prave a sa koje nije tačka A_3. Nastavljajući ovaj proces dolazimo do zaključka da su vrhovi $A_1, A_3, A_5, \ldots, A_{N-2}, A_N$ sa jedne strane prave dok su vrhovi $A_2, A_4, \ldots, A_{N-1}$ sa druge strane prave a.

Sad ako posmatramo $\triangle A_1A_2A_N$ imamo da su A_1 i A_N sa iste strane prave a sa koje nije tačka A_2,



tj. dobijamo da prava a ne siječe stranicu A_1A_N.

kontradikcija

Pretpostavka suprotna tvrdnji nas vodi u kontradikciju pa nije tačna. Prema tome: prava ne može sjeći sve stranice mnogougla sa neparnim brojem stranica.

Aksiome podudarnosti

Postoji pet aksioma podudarnosti (tri aksiome podudarnosti za duži + dvije aksiome podudarnosti za uglove)

III_1 Za svaku polupravu a' sa početnom tačkom A' i za svaku duž AB, postoji tačka $B' \in A'$, takva da je duž AB podudarna sa duži $A'B'$, što zapisujemo ovako $AB \cong A'B'$.

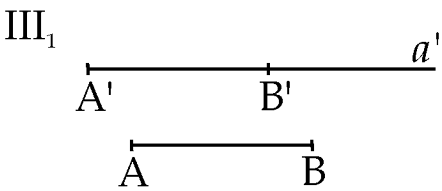
III_2 Ako je $A'B' \cong AB$ i $A''B'' \cong AB$ tada je $A'B' \cong A''B''$.

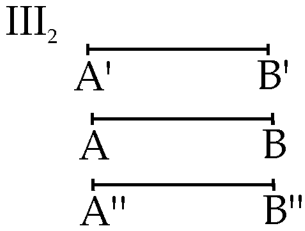
III_3 Ako je $A - B - C$ i $A' - B' - C'$ i ako je $AB \cong A'B'$ i $BC \cong B'C'$ tada je $AC \cong A'C'$.

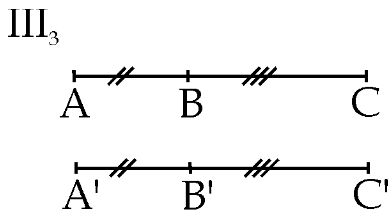
III_4 Za svaku poluravan α' sa ivicom u pravoj p', za svaku polupravu $a' \subseteq p'$ sa početnom tačkom O', za svaki ugao $\measuredangle ab$, postoji jedna i samo jedna poluprava $b' \subseteq \alpha'$ sa početnom tačkom O', takva da je ugao $\measuredangle ab$ podudaran sa uglom $\measuredangle a'b'$, što zapisujemo $\measuredangle ab \cong \measuredangle a'b'$.

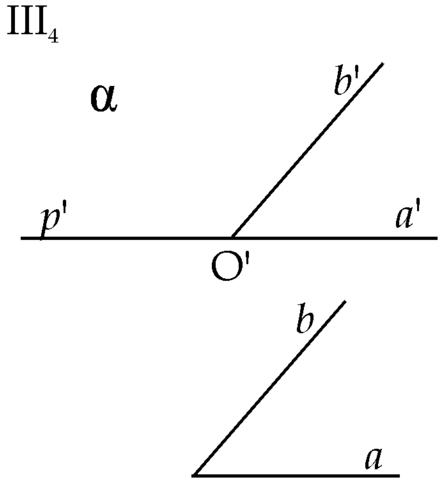
III_5 Ako za trouglove $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ važi da je $AB \cong A'B'$, $AC \cong A'C'$, $\measuredangle BAC \cong \measuredangle B'A'C'$ tada je i $\measuredangle CBA \cong \measuredangle C'B'A'$.

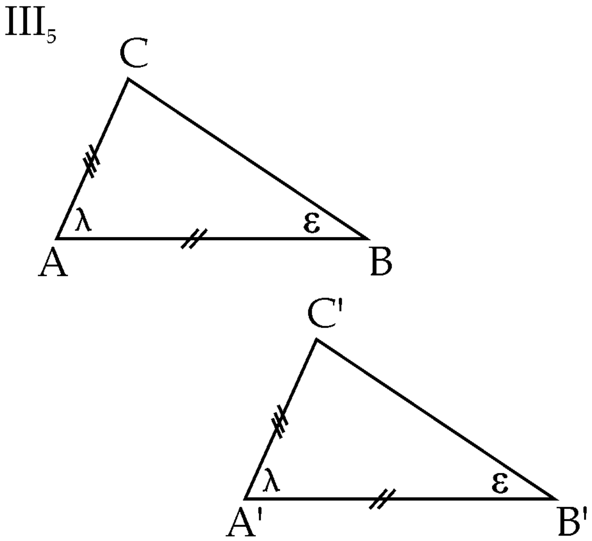
Skraćeno, aksiome podudarnosti predstavljene slikama:











Sljedeće teoreme su dokazane na predavanjima i mi ćemo ih samo navesti.
Teoreme o podudarnosti trouglova:

1.

$$\left.\begin{array}{c} AB \cong A'B' \\ \measuredangle CAB \cong \measuredangle C'A'B' \\ AC \cong A'C' \end{array}\right\} \overset{\text{SUS}}{\Longrightarrow} \triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$$

2.

$$\left.\begin{array}{c}\measuredangle CAB \cong \measuredangle C'A'B' \\ AB \cong A'B' \\ \measuredangle ABC \cong \measuredangle A'B'C'\end{array}\right\} \overset{\text{USU}}{\Longrightarrow} \quad \triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$$

3.

$$\left.\begin{array}{c}AB \cong A'B' \\ AC \cong A'C' \\ BC \cong B'C'\end{array}\right\} \overset{\text{SSS}}{\Longrightarrow} \quad \triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$$

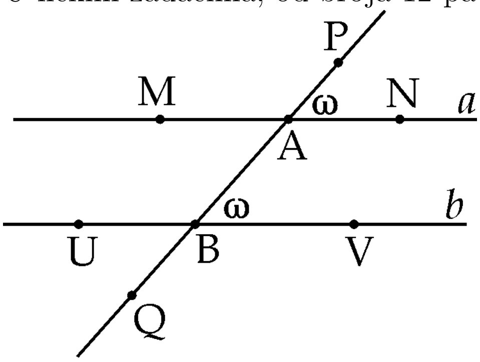
4.

$$\left.\begin{array}{c}\measuredangle ACB \cong \measuredangle A'C'B' \\ \measuredangle CAB \cong \measuredangle C'A'B' \\ AB \cong A'B'\end{array}\right\} \overset{\text{UUS}}{\Longrightarrow} \quad \triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$$

5.

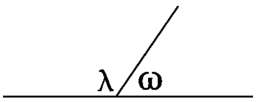
$$\left.\begin{array}{c}AC \cong A'C' \\ BC \cong B'C' \\ \measuredangle ABC \cong \measuredangle A'B'C' \\ AC > BC\end{array}\right\} \overset{\substack{\text{SSU} \\ \text{(ugao nasprem veće stranice)}}}{\Longrightarrow} \quad \triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$$

U nekim zadacima, od broja 12 pa nadalje, ćemo pretpostaviti da vrijedi sljedeća teorema:

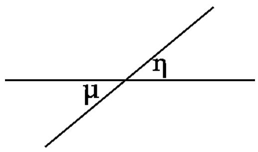


$\measuredangle PAN = \measuredangle ABV = \omega$ ako i samo ako $a \| b$

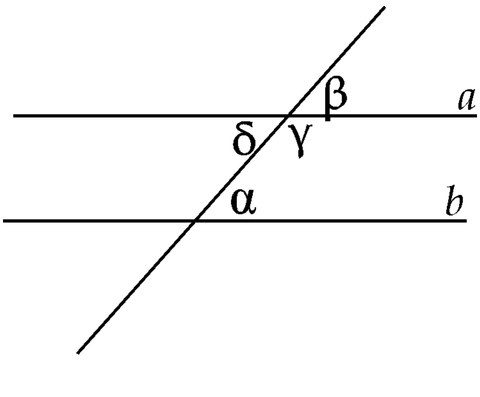
($p(P, Q)$ transferzala ili presječnica)



λ i ω su naporedni uglovi



η i μ su unakrsni ugolovi



α i β su saglasni uglovi

α i γ su suprotni uglovi

α i δ su naizmjenični uglovi

Urađeni zadaci

1. Vanjski (spoljašnji) ugao trougla je veći od oba unutrašnja nesusjedna ugla. Dokazati.

2. Najviše jedan ugao u trouglu može biti prav ili tup, a najmanje dva su oštra. Dokazati.

3. Nasuprot većeg ugla u trouglu leži veća stranica. Dokazati.

4. Neka je $\measuredangle aOb$ prav ugao (a i b su poluprave sa početnom tačkom O) i neka su tačke $A \in a$ i B, $C \in b$. Dokazati da je $OC > OB$ ako i samo ako je $AC > AB$.

5. Dokazati da je ortogonalna projekcija tačke koja pripada jednom kraku oštrog ugla na pravu određenu drugim krakom pripada tom, drugom kraku. Formuliati i dokazati odgovarajuću teoremu za tup ugao.

6. Neka je AA_1 težišna linija $\triangle ABC$. Dokazati da je ugao $\measuredangle BAA_1 > \measuredangle CAA_1$ ako i samo ako je $AB < AC$.

7. Neka je A_1 sredina stranice BC trougla $\triangle ABC$. Dokazati da vrijedi:
   a) $AA_1 > \frac{1}{2}(AB + AC - BC)$
   b) $AA_1 < \frac{1}{2}(AB + AC)$
   c) zbir težišnih linija trougla je veći od poluobima a manji od obima trougla.

8. Neka je M tačka u unutrašnjosti trougla $\triangle ABC$. Dokazati da vrijedi:
   a) $\measuredangle AMB > \measuredangle ACB$
   b) $MA + MB < AC + CB$

9. Neka je M_1 ortogonalna projekcija tačke M na pravu određenu tačkama A i B. Dokazati da je $MA \geq MB$ ako i samo ako je $MA_1 \geq M_1B$.

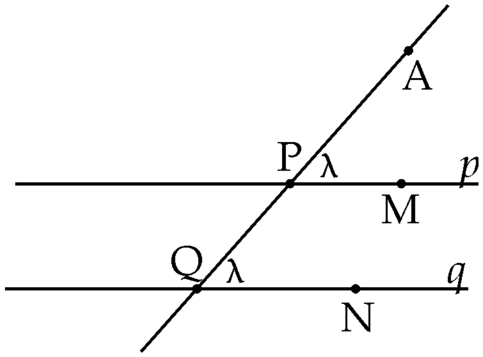
10. Za trouglove $\triangle ABC$ i $\triangle A_1B_1C_1$ vrijedi $AB \cong A_1B_1$ i $AC \cong A_1C_1$. Dokazati da je $BC \geq B_1C_1$ ako i samo ako je $\measuredangle BAC \geq \measuredangle B_1A_1C_1$.

11. U trouglu ABC je $AB < AC$. Neka su E, D i H redom tačke u kojima simetrala ugla, težišna linija i visina iz tjemena A sijeku prave BC. Dokazati da vrijedi
    a)$\measuredangle AEB < \measuredangle AEC$
    b)$BE < CE$
    c) da je poredak $H - E - D$.

12. Dokazati da je potreban i dovoljan uslov da trougao bude jednakokraki
    a) da su dvije visine podudarne
    b) da je jedna simetrala ugla ujedno i težišnica
    c) da su mu dvije težišne linije podudarne.

13. U konveksnom četverouglu $\square ABCD$, AB je najveća, a CD najmanja stranica. Dokazati da je $\measuredangle D > \measuredangle B$ i $\measuredangle C > \measuredangle A$.

Pretpostavimo da je dokazana teorema o ugovima na transferzali koja glasi:



$\measuredangle APM = \measuredangle AQN = \lambda$ ako i samo ako $p \| q$

Pomoću ove teoreme možemo uraditi zadatak broj 1 i na drugi način.

14. Vanjski (spoljašnji) ugao trougla je veći od oba unutrašnja nesusjedna ugla. Zbir uglova u trouglu je ravan ugao. Dokazati.

15. U konveksnom četverouglu $\square ABCD$ je $\measuredangle A = \measuredangle B$ i $BC > AD$. Dokazati da je $\measuredangle C < \measuredangle D$.

16. U trouglu $\triangle ABC$, AP polovi ugao $\measuredangle BAC$, sa P na BC, i duž BQ polovi $\measuredangle ABC$ sa Q n CA. Zna se da je $\measuredangle BAC = 60°$ i da je $AB + BP \cong AQ + QB$. Odrediti ostale uglove u $\triangle ABC$.

17. Dokazati da je u svakom konveksnom četverouglu bar jedna stranica manja od veće dijagonale.

18. Dokazati da u trouglu postoji najviše jedna stranica koja je manja od njoj odgovarajuće visine.

19. Između svih trouglova sa datim zbirom težišnih linija odrediti onaj sa najvećim zbirom visina.

20. Dokazati da u trouglu postoji najviše jedna stranica koja je manja od njoj odgovarajuće visine.

Problemi broj 3

Zadaci za vježbu

21. U trouglu su povučene simetrala ugla i težišna linija iz tjemena koje je incidentno sa dvije nejednake stranice trougla. Dokazati da je odsječak simetrale ugla koji leži između tjemena i naspremne stranice manji od težišne linije.

22. U konveksnom četverouglu $\square ABCD$ je $AD \cong BC$ i $\measuredangle DAB > \measuredangle ABC$. Dokazati da je i $\measuredangle BCD > CDA$.

23. U konveksnom četverouglu $\square ABCD$ je $\measuredangle A \cong \measuredangle C$ i $\measuredangle B \cong \measuredangle D$. Dokazati da je $AB \cong CD$ i $AD \cong BC$.

24. Dokazati da je zbir dijagonala konveksnog četverougla veći od poluobima, a manji od obima četverougla.

25. Ako sva tri tjemena trougla $\triangle A_1B_1C_1$ pripadaju unutrašnjosti trougla ABC, tada je obim trougla $\triangle A_1B_1C_1$ manji od obima trougla $\triangle ABC$. Dokazati.

26. Neka je AB najmanja stranica trougla $\triangle ABC$ i M proizvoljna tačka u unutrašnjosti trougla. Dokazati da je $MA + MB + MC < AC + BC$.

27. Dokazati da konveksan četverougao $\square ABCD$ tangentan ako i samo ako je se kružnice upisane u trouglove $\triangle ABC$ i $\triangle ACD$ dodiruju.

    Napomena: Četverougao je tangentan ako i samo ako se u njega može upisati kružnica.

28. Kod tangentnog četverougla sredina jedne dijagonale pripada drugoj dijagonali. Dokazati da je taj četverougao deltoid.

    Napomena: Deltoid je konveksan četverougao u kojem iz dva dijagonalna tjemena izlaze po dvije međusobno podudarne stranice.

29. Ako postoji kružnica koja na svim stranicama četverougla $\square ABCD$ odsjeca međusobno podudarne duži, tada je $AB + CD \cong AD + BC$. Dokazati.

30. U konveksnom četverouglu $\square ABCD$ je $AC + CD \geq AB + BD$. Dokazati da je AB<AC. Da li tvrđenje važi za nekonveksne četverouglove?

31. Dakazati da u Sakerijevom četverouglu $\square ABCD$ simetrala stranice AB je istovremenao i simetrala stranice CD.

    Napomena: Konveksan četverougao $\square ABCD$ kod kojeg su uglovi kod tjemena A i D pravi, a stranice AD i BC međusobno podudarne, zove se Sakerijev.

32. Dakazati da u Sakerijevom četverouglu $\square ABCD$ je $\measuredangle C \cong \measuredangle D$.

33. Dakazati da u Sakerijevom četverouglu $\square ABCD$ je $AB \leq CD$.

34. Neka su A_1 i B_1 redom sredine stranica BC i AC trougla $\triangle ABC$. Dokazati da je $A_1B_1 \leq \frac{1}{2}AB$.

35. Neka su A_1 i B_1 redom sredine stranica BC i AC trougla $\triangle ABC$. Dokazati da prava A_1B_1 je normalna na simetralu stranice AB.

36. Neka su A_1 i B_1 redom sredine stranica BC i AC trougla $\triangle ABC$. Dokazati da prava A_1B_1 ne siječe pravu AB.

37. Neka je C' podnožje visine iz tjemena C pravouglog trougla $\triangle ABC$ sa pravim uglom kod tjemena C. Dokazati da je $\measuredangle ACC' \leq \measuredangle ABC$

38. Dokazati da je u pravouglom trouglu $\triangle ABC$, $SC \leq \frac{1}{2}AB$, gdje je S-sredina hipotenuze AB.

39. Dokazati da periferiski ugao nad prečnikom kružnice nije veći od pravog ugla.

40. Dokazati da je unutrašnjost kružnice konveksna oblast.

Aksiome podudarnosti

Postoji pet aksioma podudarnosti (tri aksiome podudarnosti za duži + dvije aksiome podudarnosti za uglove)

III_1 Za svaku polupravu a' sa početnom tačkom A' i za svaku duž AB, postoji tačka $B' \in a'$, takva da je duž AB podudarna sa duži $A'B'$, što zapisujemo ovako $AB \cong A'B'$.

III_2 Ako je $A'B' \cong AB$ i $A''B'' \cong AB$ tada je $A'B' \cong A''B''$.

III_3 Ako je $A-B-C$ i $A'-B'-C'$ i ako je $AB \cong A'B'$ i $BC \cong B'C'$ tada je $AC \cong A'C'$.

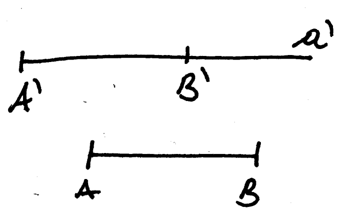
III_4 Za svaku poluravan α' sa ivicom u pravoj p', za svaku polupravu $a' \subseteq p'$ sa početnom tačkom O', za svaki ugao $\measuredangle ab$, postoji jedna i samo jedna poluprava $b' \subseteq \alpha'$ sa početnom tačkom O', takva da je ugao $\measuredangle ab$ podudaran sa uglom $\measuredangle a'b'$, što zapisujemo $\measuredangle ab \cong \measuredangle a'b'$.

Svaki ugao je podudaran samom sebi.

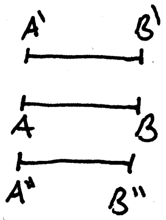
III_5 Ako za trouglove ΔABC i $\Delta A'B'C'$ važi da je $AB \cong A'B'$, $AC \cong A'C'$, $\measuredangle BAC \cong \measuredangle B'A'C'$ tada je i $\measuredangle CBA \cong \measuredangle C'B'A'$.

Skraćeno, aksiome podudarnosti predstavljene slikama:

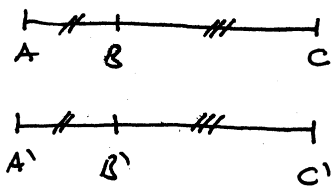
III_1



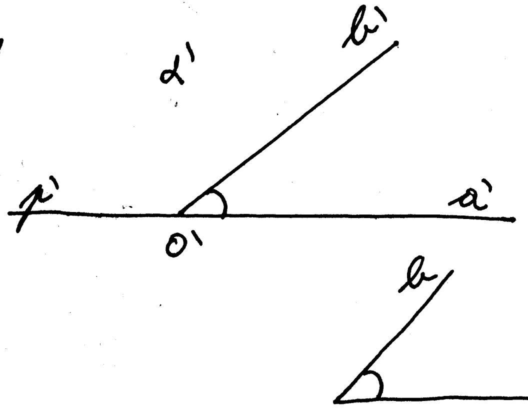
III_2



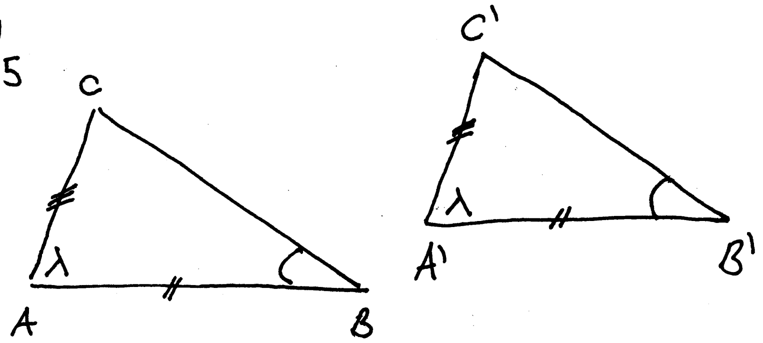
III_3



III_4



III_5



Sljedeće teoreme su dokazane na predavanjima i mi ćemo ih samo navesti.

Teoreme o podudarnosti trouglova:

1. $$\left.\begin{array}{l} AB \cong A'B' \\ \measuredangle CAB \cong \measuredangle C'A'B' \\ AC \cong A'C' \end{array}\right\} \xRightarrow{SUS} \triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$$

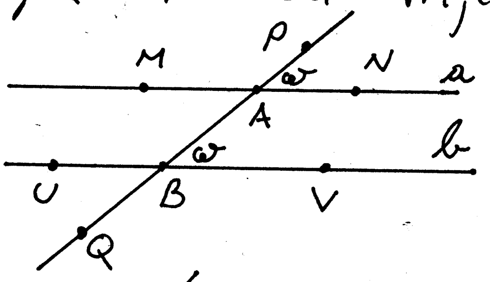
2. $$\left.\begin{array}{l} \measuredangle CAB \cong \measuredangle C'A'B' \\ AB \cong A'B' \\ \measuredangle ABC \cong \measuredangle A'B'C' \end{array}\right\} \xRightarrow{USU} \triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$$

3. $$\left.\begin{array}{l} AB \cong A'B' \\ AC \cong A'C' \\ BC \cong B'C' \end{array}\right\} \xRightarrow{SSS} \triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$$

4. $$\left.\begin{array}{l} \measuredangle ACB \cong \measuredangle A'C'B' \\ \measuredangle CAB \cong \measuredangle C'A'B' \\ AB \cong A'B' \end{array}\right\} \xRightarrow{UUS} \triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$$

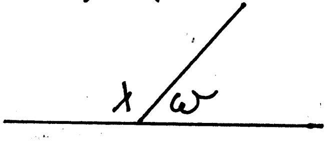
5. $$\left.\begin{array}{l} AC \cong A'C' \\ BC \cong B'C' \\ AC > BC,\ \measuredangle ABC \cong \measuredangle A'B'C' \end{array}\right\} \xRightarrow[\text{(ugao nasprām veće stranice)}]{SSU} \triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$$

U nekim zadacima od broja 12 pa nadalje ćemo pretpostaviti da vrijedi sljedeća teorema

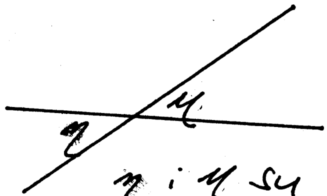


$\measuredangle PAN = \measuredangle ABV = \omega \iff a \parallel b$

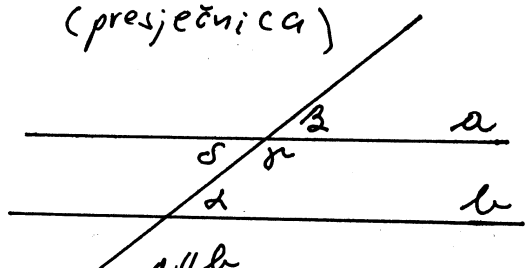
$p(P,Q)$ transferzala (presječnica)



λ i ω su naporedni uglovi



η i μ su unakrsni uglovi



$a \parallel b$

α i β su saglasni uglovi

α i γ su suprotni uglovi

α i δ su naizmjenični uglovi

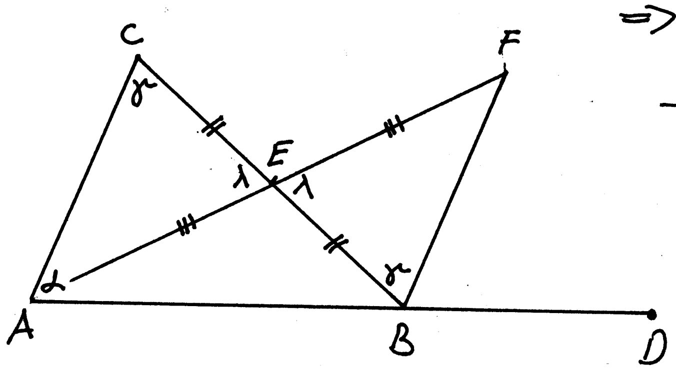
LAMBDA OMEGA ETA MI

(#) Vanjski (spoljašnji) ugao trougla je veći od oba unutrašnja nesusjedna ugla. Dokazati.

Rj. postavka zadatka

ΔABC, $\measuredangle A = \alpha$, $\measuredangle C = \gamma$, $\measuredangle CBD$ je vanjski ugao trougla (kod vrha B), $A-B-D$

$\Rightarrow \measuredangle CBD > \alpha$ i $\measuredangle CBD > \gamma$.



— — —

Označimo sa E sredinu stranice BC.

Neka je $F \in pp[A,E)$ tako da je $A-E-F$ i $AE \cong EF$.

$$\left.\begin{array}{l} AE \cong EF \\ \measuredangle AEC \cong \measuredangle FEB = \lambda \\ \quad \text{(unakrsni uglovi)} \\ CE \cong EB \end{array}\right\} \xrightarrow{SUS} \Delta AEC \cong \Delta FEB \Rightarrow \measuredangle ACE \cong \measuredangle EBF = \gamma.$$

Da bi pokazali da je $\measuredangle CBD > \gamma$ trebamo pokazati da $pp[B,F)$ nalazi u unutrašnjosti $\measuredangle CBD$.

$A-B-D \Rightarrow A$ i D se nalaze sa različitih strana prave $p(B,C)$

$A-E-F \Rightarrow A$ i F se nalaz sa različitih strana prave $p(B,C)$

$\Rightarrow$ tačke D i F se nalaze sa iste strane prave $p(B,C)$. ...(*)

$A-E-F \Rightarrow E$ i F se nalaze sa iste strane $p(A,D)$

$B-E-C \Rightarrow E$ i C se nalaze sa iste strane $p(A,D)$

$\Rightarrow$ tačke F i C se nalaze sa iste strane $p(A,D)$ ...(**)

(*) i (**) $\Rightarrow F$ se nalazi u unutrašnjosti $\measuredangle CBD \Rightarrow$

$\Rightarrow \measuredangle CBF < \measuredangle CBD$ tj. $\measuredangle CBD > \gamma$

q.e.d.

Na sličan način bi pokazali da je $\measuredangle CBD > \alpha$. KAKO?

Prema tome: Vanjski ugao trougla je veći od oba unutrašnja nesusjedna ugla.

q.e.d.

(#) Najviše jedan ugao u trouglu može biti prav ili tup, a najmanje dva su oštra. Dokazati.

Rj: postavka zadatka

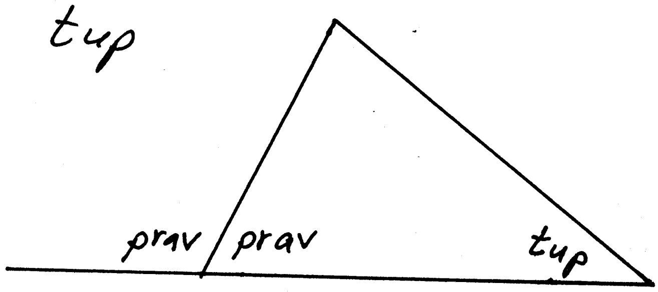
trougao $\Rightarrow$ najviše jedan ugao tup
najmanje dva oštra

Pretpostavimo suprotno tvrdnji. Suprotni slučajevi su

a) dva ugla su prava

b) jedan prav, jedan tup

c) dva ugla su tupa.



Razmotrimo slučaj pod b).

Odaberimo ugao koji je prav. Njegov vanjski ugao je prav.
Ovaj vanjski ugao (prema prethodnom zadatku) je veći od preostala dva unutrašnja ugla u trouglu, odnosno veći je od unutrašnjeg tupog ugla.

#kontradikcija
(prav < tupog)

Slično se dokazuju slučajevi pod a) i c).

Bilo koja pretpostavka suprotna tvrdnji nas vodi u kontradikciju pa nije tačna.

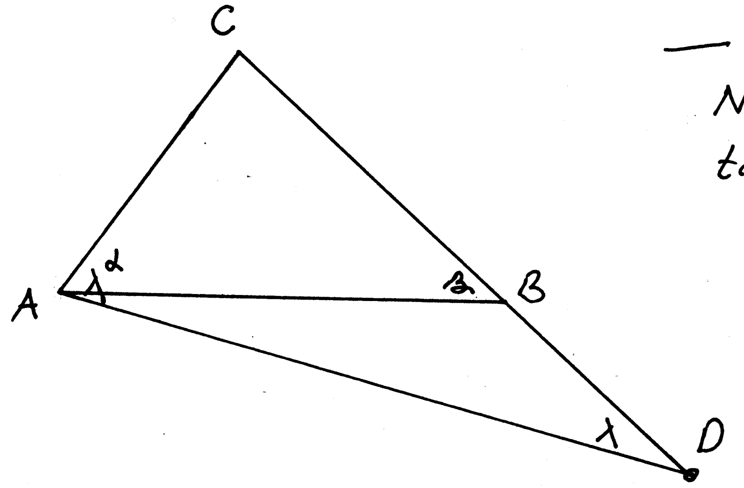
Najmanje jedan ugao u trouglu može biti prav ili tup, a najmanje dva su oštra.

q.e.d.

(#) Nasuprot većeg ugla u trouglu leži veća stranica. Dokazati.

Rj. postavka zadatka

ΔABC, $\measuredangle A = \alpha$, $\measuredangle B = \beta$, $\alpha > \beta$ $\Rightarrow$ $BC > AC$.



Neka je tačka $D \in pp[C,B)$ tako da je $AC \cong CD$.

Moguća su tri slučaja:

1° $C-B-D$

2° $B \equiv D$

3° $C-D-B$

Ako bi bio prvi slučaj $(C-B-D)$, kako je $AC \cong CD$ to je ΔADC jkk pa je $\measuredangle CAD \cong \measuredangle ADC = \lambda$.

$\measuredangle ABC = \beta$ je vanjski ugao ΔADB pa je $\beta > \lambda$.

Kako je $\measuredangle CAD > \measuredangle CAB$ to je $\lambda > \alpha$ pa je $\beta > \alpha$

#kontradikcija (sa pretpostavkom da je $\alpha > \beta$)

Prema tome nije prvi slučaj.

Ako bi bio drugi slučaj $(B \equiv D)$ tada bi imali da je ΔABC jkk pa bi bilo $\alpha = \beta$

#kontradikcija (sa pretpostavkom da je $\alpha > \beta$)

Prema tome mora vrijediti treći slučaj tj. da je $C- \ -B$

pa je $BC > CD = AC$ tj. $BC > AC$

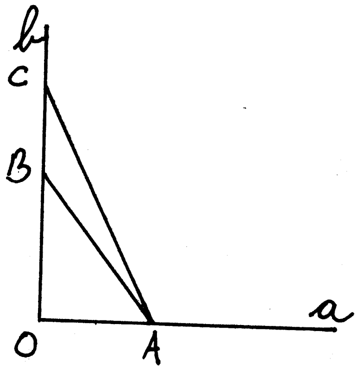
q.e.d.

(7) Neka je $\measuredangle aOb$ prav ugao (a i b su poluprave sa početnom tačkom O) i neka su tačke $A \in a$ i $B, C \in b$. Dokazati da je $OC > OB$ ako i samo ako je $AC > AB$.

Rj: postavka zadatka

potreban uslov
"$\Leftarrow$":

$$\left.\begin{array}{l} a \text{ i } b \text{ polupr. sa poč. tač. } O \\ \measuredangle aOb \text{ prav, } A \in a \\ B, C \in b, \ OC > OB \end{array}\right\} \Rightarrow AC > AB$$



$OC > OB$ to je $O-B-C$

$\measuredangle ABC$ je vanjski ugao $\triangle OAB$ pa je $\measuredangle CBA > \measuredangle AOB$ = prav ugao

$\Rightarrow$ $\measuredangle ABC$ je tup ugao

$\measuredangle ABC$ je najveći ugao u $\triangle ABC$

$\Rightarrow$ $AC > AB$

q.e.d.

---

dovoljan uslov
"$\Rightarrow$"

$$\left.\begin{array}{l} a \text{ i } b \text{ poluprave sa poč. tač. } O \\ \measuredangle aOb \text{ prav, } A \in a \\ B, C \in b, \ AC > AB \end{array}\right\} \Rightarrow OC > OB$$

Pretpostavimo suprotno tvrdnji tj. pretpostavimo da je $OC \leq OB$.

Ako bi bilo $OC = OB$ tada $C \equiv B \Rightarrow AC \cong AB$

#kontradikcija ($AC > AB$).

Ako bi bilo $OC < OB$ tada na osnovu potrebnog uslova zadatka bi imali $AC < AB$

#kontradikcija (sa pretpostavkom da je $AC > AB$).

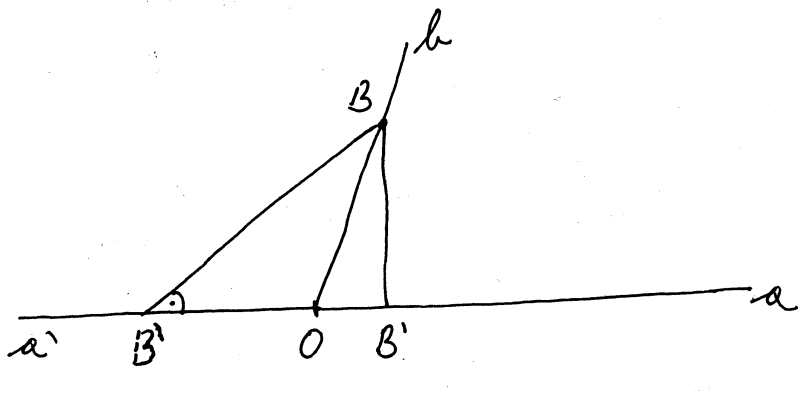
Pretpostavka suprotna tvrdnji nas vodi u kontradikciju pa nije tačna. Prema tome

$OC > OB$

q.e.d.

5. Dokazati da ortogonalna projekcija tačke koja pripada jednom kraku oštrog ugla na pravu određenu drugim krakom pripada tom, drugom kraku. Formulisati i dokazati odgovarajuću tvrdnju za tup ugao.

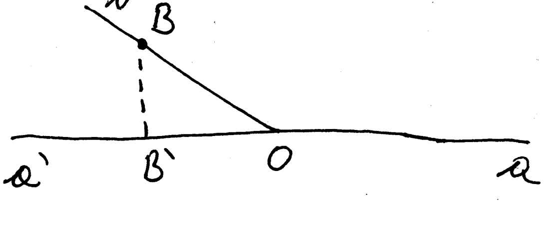
Rj.
$\left.\begin{array}{l} \measuredangle aOb \text{ oštar ugao} \\ a, b \text{ poluprave} \\ B \in b \\ B' \text{ ortogonalna projekcija tačke } B \end{array}\right\} \Longrightarrow B' \in a$



Neka je a' poluprava sa početnom tačkom O koja dopunjuje polupravu a do prave. Pretpostavimo da $B' \in a'$.

Tada je ugao $\measuredangle OB'B$ = prav ugao. Kako je $\measuredangle aOb$ oštar ugao to je $\measuredangle B'OB$ = tup ugao. Dobio sam da u $\triangle B'OB$ postoji jedan tup i jedan prav ugao,
kontradikcija
(najviše jedan ugao može biti prav ili tup)

Pretpostavka da $B' \in a'$ nas je dovela u kontradikciju pa nije tačna. Prema tome $B' \notin a' \Rightarrow B' \in a$
q.e.d.

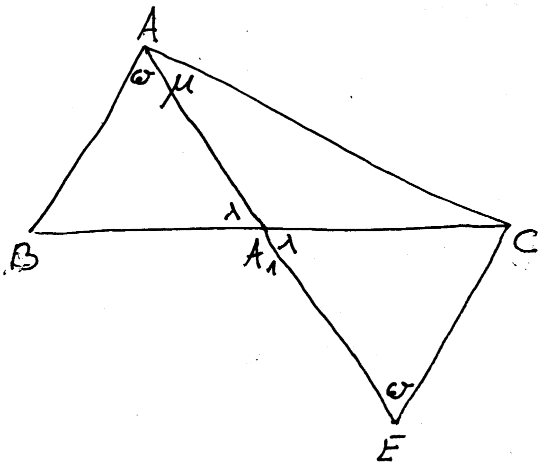


Formulaciju i dokaz odgovarajuće tvrdnje za tup ugao ostavljamo za vježbu.

6. Neka je AA_1 težišna linija $\triangle ABC$. Dokazati da je ugao $\measuredangle BAA_1 > \measuredangle CAA_1$ ako i samo ako je $AB < AC$.

potreban uslov

"$\Rightarrow$":
$$\left.\begin{array}{l} \triangle ABC \\ AA_1 \text{ težišna linija} \\ \measuredangle BAA_1 > \measuredangle CAA_1 \end{array}\right\} \Rightarrow AB < AC$$



Kako je AA_1 težišna linija to je $BA_1 \cong CA_1$.
Iz aksioma podudarnosti $\exists E \in pp[A, A_1)$ takva da $AA_1 \cong A_1E$ i $A - A_1 - E$

Sad imam
$$\left.\begin{array}{l} BA_1 \cong CA_1 \\ \measuredangle BA_1A \cong \measuredangle CA_1E \text{ (unakrsni uglovi)} \\ AA_1 \cong EA_1 \end{array}\right\} \overset{SUS}{\Longrightarrow} \triangle ABA_1 \cong \triangle A_1EC$$
$$\Downarrow$$
$$\measuredangle BAA_1 \cong \measuredangle A_1EC = \omega$$
$$\vdots$$
$$AB = EC$$

Prema pretpostavci $\measuredangle A_1AC = \mu < \omega$
pa u trouglu $\triangle AEC$, ugao $\measuredangle AEC > \measuredangle CAE$
$$\Downarrow$$
$$AC > CE \quad \text{tj.} \quad AB < AC$$
q.e.d.

dovoljan uslov

"$\Leftarrow$":
$$\left.\begin{array}{l} \triangle ABC \\ AA_1 \text{ težišna linija} \\ AB < AC \end{array}\right\} \Rightarrow \measuredangle BAA_1 > \measuredangle CAA_1$$

Pretpostavimo suprotno tvrdnji tj. $\measuredangle BAA_1 \leq \measuredangle CAA_1$.
Prema potrebnom uslovu zadatka iz ove činjenice dobijamo:
$$AB \geq AC$$
kontradikcija (sa pretpostavkom $AB < AC$)

Prema tome mora vrijediti $\measuredangle BAA_1 > \measuredangle CAA_1$ q.e.d.

7. Neka je A_1 sredina stranice BC trougla ΔABC.
Dokazati da vrijedi:

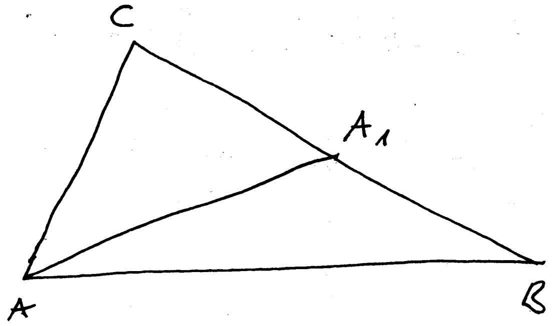
a) $AA_1 > \frac{1}{2}(AB + AC - BC)$

b) $AA_1 < \frac{1}{2}(AB + AC)$

c) zbir težišnih linija trougla je veći od poluobima a manji od obima trougla.

Rj.

a) $\left.\begin{array}{l}\Delta ABC \\ A_1 \text{ sredina stranice } BC\end{array}\right\} \Rightarrow AA_1 > \frac{1}{2}(AB + AC - BC)$



Za ΔABA_1 imam:

$AA_1 + A_1B > AB \quad \ldots(1)$

Za ΔAA_1C imam

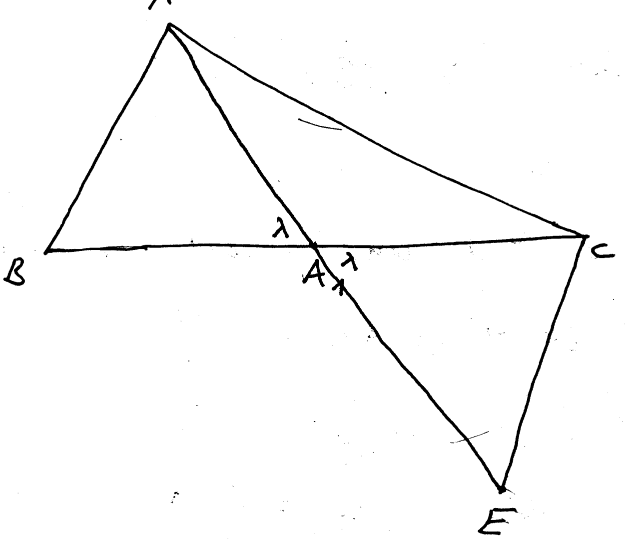
$AA_1 + A_1C > AC \quad \ldots(2)$

$(1)+(2) \Rightarrow 2AA_1 + BC > AB + AC$

tj. $AA_1 > \frac{1}{2}(AB + AC - BC)$

q.e.d.

b) $\left.\begin{array}{l}\Delta ABC \\ A_1 \text{ sredina stranice } BC\end{array}\right\} \Rightarrow AA_1 < \frac{1}{2}(AB + AC)$



Iza aksiome podudarnosti:

$\exists E \in pp[A, A_1): A - A_1 - E$

$; \ AA_1 \cong A_1E$

Sad imam

$\left.\begin{array}{l} BA_1 \cong A_1C \\ \measuredangle BA_1A \cong \measuredangle CA_1E = \lambda \\ AA_1 \cong A_1E \end{array}\right\} \overset{SUS}{\Rightarrow} \Delta ABA_1 \cong \Delta A_1CE$

$\Downarrow$

$AB \cong EC$

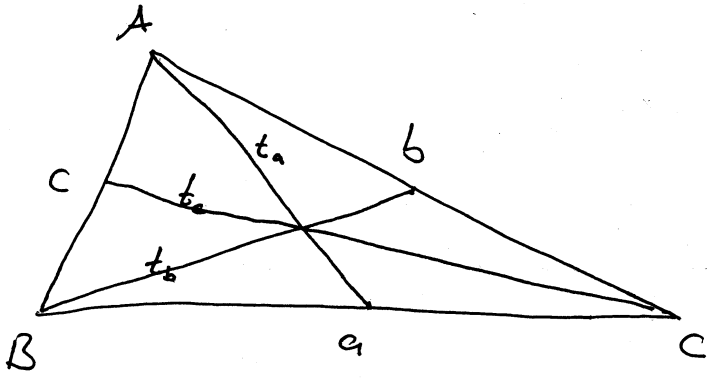
Imam $AE < AC + CE$ tj. $2AA_1 < AC + AB$

$AA_1 < \frac{1}{2}(AC + AB)$

q.e.d.

c) ΔABC

$\left.\begin{array}{l} \Delta ABC \\ a, b, c \text{ stranice } \Delta \\ t_a, t_b, t_c \text{ težišne linije trougla} \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{1}{2} O_{\Delta ABC} < t_a + t_b + t_c < O_{\Delta ABC}$



Iz a) i b) smo dobili

$$\frac{1}{2}(c+b-a) < t_a < \frac{1}{2}(c+b) \quad (*)$$

Na isti način zaključujemo da je

$$\frac{1}{2}(a+c-b) < t_b < \frac{1}{2}(a+c) \quad (**)$$

$$\frac{1}{2}(a+b-c) < t_c < \frac{1}{2}(a+b) \quad (***)$$

Kad saberemo $(*) + (**) + (***)$:

$$\frac{1}{2}(a+b+c) < t_a + t_b + t_c < a+b+c$$

q.e.d.

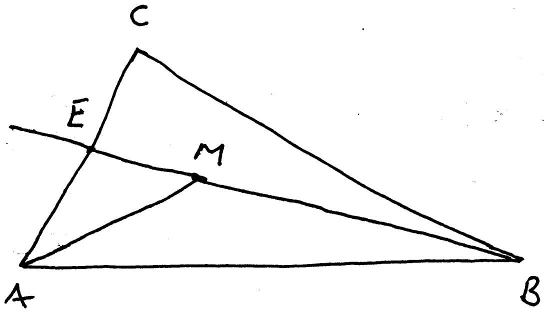
8. Neka je M tačka u unutrašnjosti trougla ΔABC. Dokazati da vrijedi:

a) $\measuredangle AMB > \measuredangle ACB$

b) $MA + MB < AC + CB$

Rj.

a) $\left.\begin{array}{l} \Delta ABC \\ M \in \text{unutrašnjosti } \Delta ABC \end{array}\right\} \Rightarrow \measuredangle AMB > \measuredangle ACB$



Kako je M u unutrašnjosti ΔABC to

$pp[B, M) \cap AC = \{E\}$

$\measuredangle AMB$ je vanjski ugao ΔAEM pa $\measuredangle AMB > \measuredangle AEM$

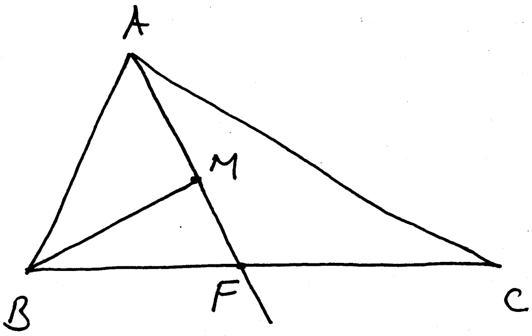
$\measuredangle AEM$ je vanjski ugao ΔBCE pa $\measuredangle AEM > \measuredangle BCE$.

Prema tome $\measuredangle AMB > \measuredangle ACB$

q.e.d.

b) $\triangle ABC$

M u unutrašnjosti $\triangle ABC$ $\Big\} \Longrightarrow MA+MB < AC+CB$



Kako je M u unutrašnjosti $\triangle ABC$ to $pp[A,M) \cap BC = \{F\}$.

Za $\triangle AFC$ važi

$$AF < AC + CF \quad \dots (I)$$

Za $\triangle BFM$ važi

$$MB < MF + BF \quad \dots (II)$$

Iz (I) + (II) imamo

$$AM + \cancel{MF} + MB < AC + CF + \cancel{MF} + BF$$

$$MA + MB < AC + CB$$

q.e.d.

II način:

slika je ista

$$AM + MB < AM + BF + FM = AF + BF < AC + FC + BF = AC + BC$$

tj. $AM + MB < AC + BC$

q.e.d.

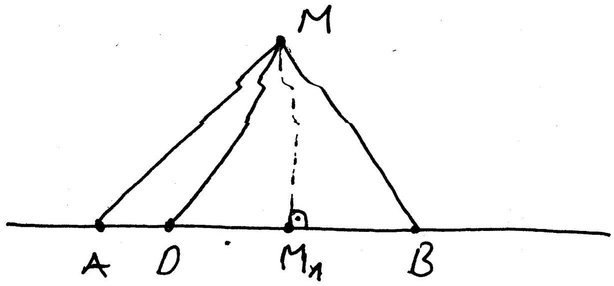
9. Neka je M_1 ortogonalna projekcija tačke M na pravu određenim tačkama A i B. Dokazati da je $MA \geq MB$ ako i samo ako je $M_1A \geq M_1B$.

Rj. dovoljan uslov "$\Longleftarrow$":

$$\left.\begin{array}{l} A, B, M \\ p(A,B) \\ M_1 \text{ je ortogonalna projekcija tačke } M \text{ na } p(A,B) \\ M_1A \geq M_1B \end{array}\right\} \Longrightarrow MA \geq MB.$$

Kako je M_1 ortogonalna projekcija tačke M na $p(A,B)$ za tačke A, B i M_1 moguć je jedna od sljedeća tri poretka: $A-M_1-B$, M_1-A-B i $A-B-M_1$.

Slučajeve M_1-A-B i $A-B-M_1$ smo razmatrali u zadatku broj 4. tako da se ovdje time nećemo zamarati.



Znači imamo $A-M_1-B$

i $AM_1 \geq M_1B$

Razmotrićemo dva slučaja:

1° $M_1A = M_1B$ i

2° $M_1A > M_1B$.

Za $M_1A = M_1B$ bi imali:

$$\left.\begin{array}{l} M_1A \cong M_1B \\ \measuredangle AM_1M \cong \measuredangle BM_1M = \text{pravi ugao} \\ MM_1 \cong MM_1 \end{array}\right\} \xRightarrow{SUS} \begin{array}{c} \triangle AMM_1 \cong \triangle BMM_1 \\ \Downarrow \\ AM = BM \end{array}$$

q.e.d.

Ako bi bilo $M_1A > M_1B$ iz aksiome podudarnosti

$\exists D \in pp[M_1, A)$ takva M_1-D-A i $M_1D = M_1B$

Sad imam:

$$\left.\begin{array}{l} DM_1 \cong M_1B \\ \measuredangle DM_1M \cong \measuredangle BM_1M \\ MM_1 \cong MM_1 \end{array}\right\} \xRightarrow{SUS} \begin{array}{c} \triangle DM_1M \cong \triangle BM_1M \\ \Downarrow \\ MD \cong MB \end{array}$$

Ugao $\measuredangle ADM$ je vanjski ugao $\triangle DM_1M$ i nije susjedan uglu $\measuredangle DM_1M$ koji je pravi ugao $\Longrightarrow$

$\measuredangle ADM$ je tup ugao

U $\triangle ADM$, ugao $\measuredangle ADM$ je najveći ugao pa $AM > MD$

tj imamo $MA > MB$

q.e.d.

potreban uslov

,, $\Longrightarrow$ '' :

$$\left.\begin{array}{l} A, B, M \\ p(A, B) \\ M_1 \text{ je ortogonalna projekcija} \\ \text{tačke } M \text{ na } p(A,B) \text{ takva} \\ \text{da je } A-M_1-B \\ MA \geq MB \end{array}\right\} \Longrightarrow M_1A \geq M_1B$$

Pretpostavimo suprotno tvrdnji, tj. pretpostavimo da je $M_1A < M_1B$. Tada bi prema dovoljnom uslovu ovog zadatka vrijedilo $MA < MB$

kontradikcija (sa hipotezom $MA \geq MB$)

Pretpostavka suprotna tvrdnji nas dovodi do kontradikcije pa nije tačna. Prema tome mora vrijediti

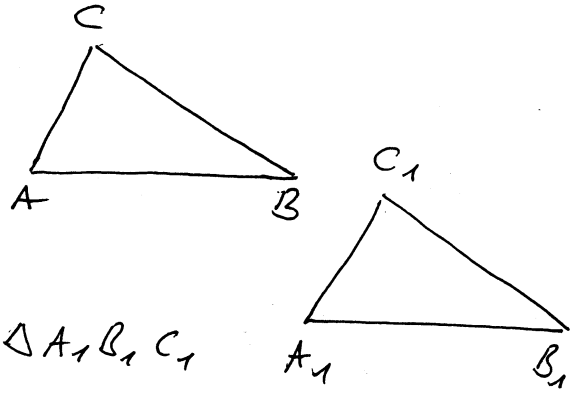
$$M_1A \geq M_1B$$

q.e.d.

10. Za trouglove ΔABC i $\Delta A_1B_1C_1$ vrijedi $AB \cong A_1B_1$ i $AC \cong A_1C_1$. Dokazati da je $BC \geq B_1C_1$ ako i samo ako je $\measuredangle BAC \geq \measuredangle B_1A_1C_1$.

Rj. potreban uslov "$\Rightarrow$":

$$\left.\begin{array}{l} \Delta ABC \\ \Delta A_1B_1C_1 \\ AB \cong A_1B_1 \\ AC \cong A_1C_1 \\ BC \geq B_1C_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \measuredangle BAC \geq \measuredangle B_1A_1C_1$$



Ako bi bilo $BC \cong B_1C_1$ imali bi:

$$\left.\begin{array}{l} AB \cong A_1B_1 \\ AC \cong A_1C_1 \\ BC \cong B_1C_1 \end{array}\right\} \xrightarrow{SSS} \Delta ABC \cong \Delta A_1B_1C_1$$

$$\Downarrow$$

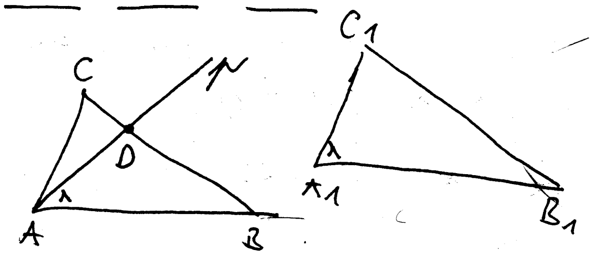
$$\measuredangle BAC = \measuredangle B_1A_1C_1$$

q.e.d.

Za $BC > B_1C_1$ dokaz je malo komplikovaniji pa ćemo mu se vratiti kasnije.

dovoljan uslov "$\Leftarrow$":

$$\left.\begin{array}{l} \Delta ABC,\ \Delta A_1B_1C_1 \\ AB \cong A_1B_1,\ AC \cong A_1C_1 \\ \measuredangle BAC \geq \measuredangle B_1A_1C_1 \end{array}\right\} \Rightarrow BC \geq B_1C_1$$



Ako bi bilo $\measuredangle BAC = \measuredangle B_1A_1C_1$ imali bi:

$$\left.\begin{array}{l} AC \cong A_1C_1 \\ \measuredangle BAC \cong \measuredangle B_1A_1C_1 \\ AB \cong A_1B_1 \end{array}\right\} \xrightarrow{SUS} \Delta ABC \cong \Delta A_1B_1C_1$$

$$\Downarrow$$

$$BC = B_1C_1$$

q.e.d.

Pretpostavimo da je $\sphericalangle BAC > \sphericalangle B_1A_1C_1$. Iz aksiome podudarnosti za $\sphericalangle B_1A_1C_1$ $\exists$ poluprava p : $\sphericalangle BAp \cong \sphericalangle B_1A_1C_1$. $p \cap BC = \{D\}$.

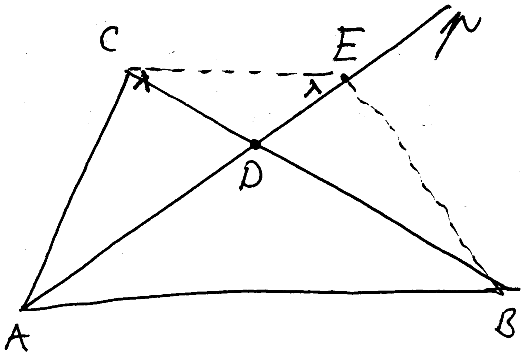
Na polupravoj p $\exists E$: $AE \cong AC$.

Za tačke D i E moguć je jedan od sljedeća tri odnosa:

1° $A-D-E$

2° $D \equiv E$

3° $A-E-D$.



Ako bi važio poredak $A-D-E$, imali bi $AC = AE \Rightarrow$ $\sphericalangle ACE = \sphericalangle AEC = \lambda$.

Posmatram $\triangle CBE$.

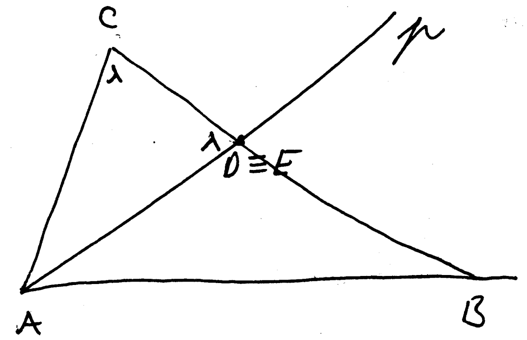
$\sphericalangle AEC = \sphericalangle ACE > \sphericalangle DCE$.

$\sphericalangle CEB > \sphericalangle CED$ pa prema tome:

$\sphericalangle CEB > \sphericalangle BCE \Rightarrow BC > BE$

tj. $BC > B_1C_1$

q.e.d.

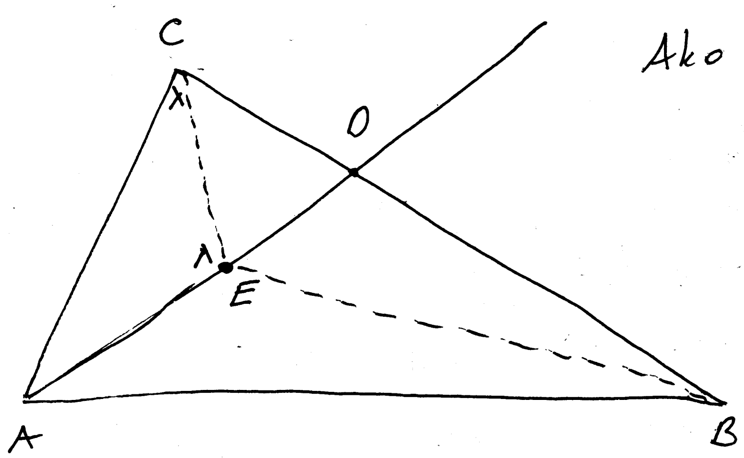


Ako bi vrijedilo $D \equiv E$

iz poretka $B-D-C \Rightarrow BD < BC$

tj. $B_1C_1 < BC$

q.e.d.



Ako bi bilo $A-E-D$

$AE = AC \Rightarrow \sphericalangle AEC = \sphericalangle ACE = \lambda$

λ oštar ugao pa kako je $\sphericalangle CED$ vanjski susjedni ugao uglu $\sphericalangle AEC$ to je $\sphericalangle CED$ tup.

Slijedi da je $\sphericalangle ECD$ oštar pa kako je $\sphericalangle CEB > \sphericalangle CED$ to je i $\sphericalangle CEB$ tup ugao. Prema tome

$\sphericalangle CEB > \sphericalangle ECD \Rightarrow BC > BE$ tj. $BC > B_1C_1$
q.e.d.

Bez obzira koji od slučajeva za tačke D i E da se dogodi pokazali smo da $BC > B_1C_1$
q.e.d.

Vratimo se na potreban uslov.

„$\Rightarrow$":

$$\left.\begin{array}{l} \Delta ABC,\ \Delta A_1B_1C_1 \\ AB \cong A_1B_1,\ AC \cong A_1C_1 \\ BC > B_1C_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \sphericalangle BAC > \sphericalangle B_1A_1C_1$$

Ako pretpostavim suprotno tvrdnji tj. da je $\sphericalangle BAC \leq \sphericalangle B_1A_1C_1$ prema dovoljnom uslovu dobiću:

$$BC \leq B_1C_1$$

kontradikcija sa hipotezom $BC > B_1C_1$)

Prema tome mora vrijediti $\sphericalangle BAC > \sphericalangle B_1A_1C_1$
q.e.d.

(#) U trouglu ΔABC je $AB < AC$. Neka su E, D i H redom tačke u kojima simetrala ugla, težišna linija i visina iz tjemena A sijeku pravu BC. Dokazati da vrijedi:

a) $\sphericalangle AEB < \sphericalangle AEC$

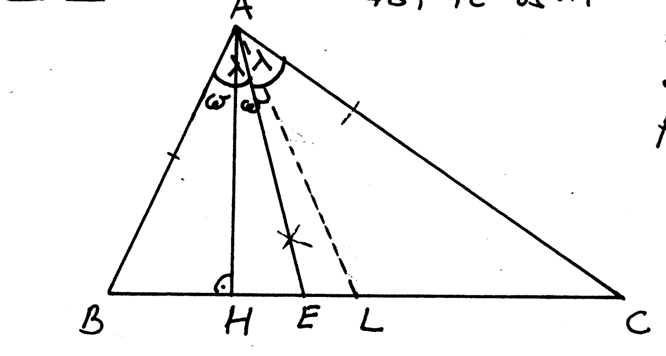
b) $BE < CE$

c) da je poredak $H-E-D$.

Rj. a) postavka zadatka

$$\left.\begin{array}{l} \Delta ABC,\ AB < AC \\ AE \text{ simetrala ugla} \\ AH \text{ visina} \end{array}\right\} \Rightarrow \sphericalangle AEB < \sphericalangle AEC$$

$\sphericalangle B$ i $\sphericalangle C$ oštri



Kako je $AB < AC$ prema 9 zadatku slijedi da je $BH < HC$.
Pokažimo da je poredak $B-H-E-C$.
Postoji tačka $L \in HC$ takva $H-L-C$ i $HL \cong HB$.

$$\left.\begin{array}{r} BH \cong HL \\ \measuredangle BHA \cong \measuredangle LHA = prav \\ AH \cong AH \end{array}\right\} \overset{SUS}{\Longrightarrow} \triangle BHA \cong \triangle LHA \Rightarrow \measuredangle BAH \cong \measuredangle LAH = \omega$$

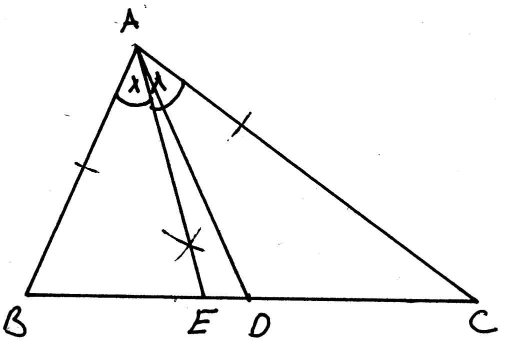
Imamo $2\omega < 2\lambda$ tj. $\omega < \lambda \Rightarrow B-H-E-C$

$\triangle AHE$ pravougli $\Rightarrow \measuredangle AEH = \measuredangle AEB =$ oštar ugao $\Rightarrow \measuredangle AEC =$ tup ugao

$\measuredangle AEC > \measuredangle AEB$ q.e.d.

b) postavka zadatka

$$\left.\begin{array}{l} \triangle ABC,\ AB < AC,\ \measuredangle\ , \measuredangle C \text{ oštri} \\ AE \text{ simetrala ugla} \\ AD \text{ težišnica} \end{array}\right\} \Rightarrow BE < CE$$



Kako je AD težišnica i $AB < AC$ prema 6 zadatku $\measuredangle BAD > \measuredangle DAC$.

Kako $\measuredangle BAE = \measuredangle CAE = \lambda \Rightarrow \measuredangle BAD > \lambda = \measuredangle BAE$

$\Rightarrow B-E-D-C$

D sredina $BC \Rightarrow BE < CE$ q.e.d.

c)
$$\left.\begin{array}{ll} \text{iz a)} & B-H-E-C \\ \text{iz b)} & B-E-D-C \end{array}\right\} \Rightarrow H-E-D$$
q.e.d.

12. Dokazati da je potreban i dovoljan uslov da trougao bude jednakokraki

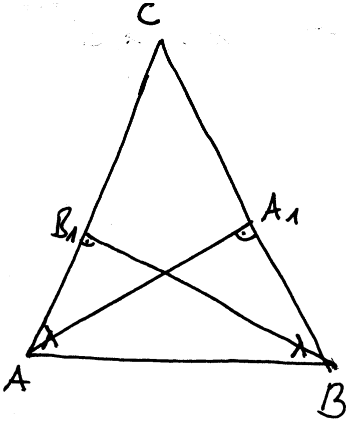
a) da su dvije visine podudarne

b) da je jedna simetrala ugla ujedno i težišnica

c) da su mu dvije težišne linije podudarne.

Rj. a)

potreban uslov "$\Rightarrow$":
$$\left.\begin{array}{l} \triangle ABC \text{ jkk} \\ (AC = BC) \\ AA_1,\ BB_1 \text{ visine trougla} \end{array}\right\} \Rightarrow AA_1 \cong BB_1$$



$\triangle ABC$ jkk $\Rightarrow \angle CAB = \angle CBA = \lambda$

$$\left.\begin{array}{l}\angle AA_1B \cong \angle BB_1A = \text{prav ugao}\\ \angle A_1BA \cong \angle B_1AB = \lambda \\ AB \cong AB\end{array}\right\} \Rightarrow \triangle AA_1B \cong \triangle BB_1A$$

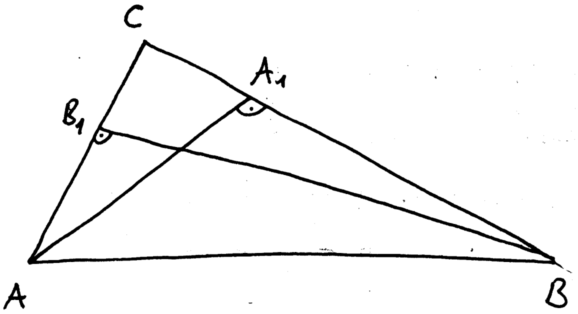
$$\Downarrow$$

$$AA_1 \cong BB_1$$

q.e.d.

dovoljan uslov „⇐“:

$$\left.\begin{array}{l}\triangle ABC \\ AA_1, BB_1 \text{ visine trougla} \\ AA_1 \cong BB_1\end{array}\right\} \Rightarrow \triangle ABC \text{ jkk}$$



Primetimo da je u $\triangle AA_1B$ i $\triangle BB_1A$ AB najveća stranica. Zašto?

Sad imamo:

$$\left.\begin{array}{l}AB \cong AB \\ AA_1 \cong BB_1 \\ \angle AA_1B \cong \angle BB_1A = \text{prav ugao} \\ AB > AA_1\end{array}\right\} \xrightarrow{SSU} \triangle AA_1B \cong \triangle BB_1A$$

(ugao naspram veće stranice)

$$\Downarrow$$

$$\angle ABA_1 \cong \angle BAB_1$$

$$\Downarrow$$

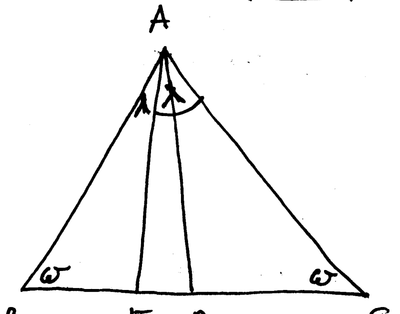
$$AC \cong BC$$

tj. $\triangle ABC$ jkk

q.e.d.

b) potreban uslov „⇐“:

$$\left.\begin{array}{l}\triangle ABC \text{ jkk} \\ (AB \cong AC) \\ AE \text{ simetrala ugla} \\ AD \text{ težišnica}\end{array}\right\} \Rightarrow AD \equiv AE \quad (\text{tj. } D \equiv E)$$



Ovaj zadatak mogu uraditi na dva načina, primenjujući teoreme USU i SUS.

$\triangle ABC$ jkk $(AB \cong AC)$ $\Rightarrow \angle ABC \cong \angle ACB = \omega$

$$\left.\begin{array}{l}\sphericalangle ABC \cong \sphericalangle ACB = \omega \\ AB \cong AC \\ \sphericalangle BAE \cong \sphericalangle CAE\end{array}\right\} \xRightarrow{USU} \triangle ABE \cong \triangle ACE$$

$$\Downarrow$$

$$BE \cong EC$$

$$\Downarrow$$

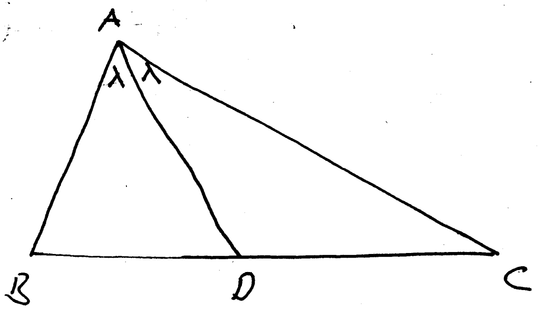
$E \equiv D$ (E sredina BC

$$\Downarrow$$

$AD \equiv AE$ q.e.d.

dovoljan uslov „$\Rightarrow$":

$$\left.\begin{array}{l}\triangle ABC \\ AD \text{ je simetrala ugla i težišnica}\end{array}\right\} \Rightarrow \triangle ABC \text{ jkk}$$



$$\left.\begin{array}{l}BD = CD \\ AD = AD \\ \sphericalangle BAD = \sphericalangle CAD = \lambda\end{array}\right\} \Rightarrow \text{ne slijedi ništa}$$

Zašto?

Ako bi bilo $AB < AC$; kako je AD simetrala ugla prema prethodnom zadatku (tvrdnja pod b) bi bilo

$$BD < CD$$

\# kontradikcije ($BD \cong CD$)

Na isti način,
ako bi $AB > AC$, AD simetrala $\xRightarrow{\text{prethodni zadatak}}$ $BD > CD$
\# kontradikcija ($BD \cong CD$)

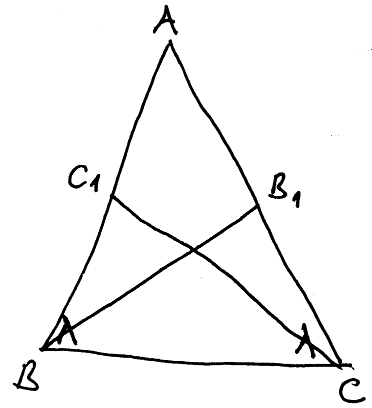
Prema tome, mora vrijediti $AB \cong AC$
tj $\triangle ABC$ jkk
q.e.d.

c) potreban uslov
„$\Rightarrow$":

$$\left.\begin{array}{l}\triangle ABC \text{ jkk} \\ (AB \cong AC) \\ BB_1,\ CC_1 \text{ težišne linije}\end{array}\right\} \Rightarrow BB_1 \cong CC_1$$

$\triangle ABC$ jkk ($AB = AC$) $\Rightarrow$ $\sphericalangle ABC \cong \sphericalangle ACB = \lambda$

B_1 sredina duži AC, C_1 sredina strane AB



Kako je $AB \cong AC$ to je $BC_1 \cong CB_1$.

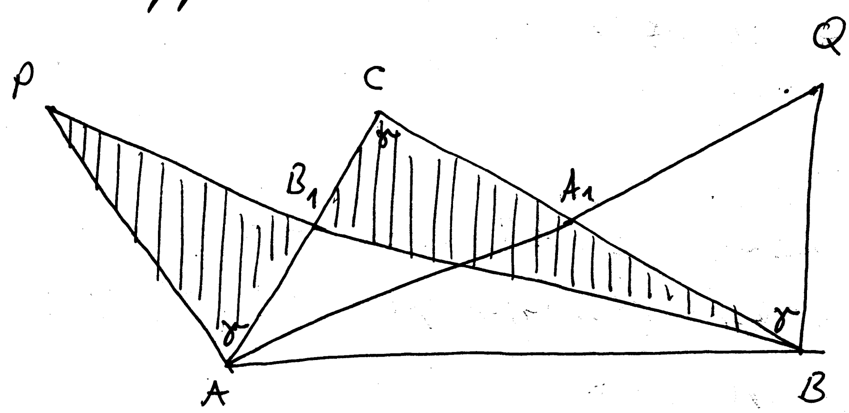
$$\left.\begin{aligned} BC &\cong BC \\ \measuredangle BCB_1 &\cong \measuredangle CBC_1 = \lambda \\ CB_1 &\cong BC_1 \end{aligned}\right\} \xRightarrow{SUS} \triangle BCB_1 \cong \triangle CBC_1 \Rightarrow BB_1 \cong CC_1$$

q.e.d.

dovoljan uslov
„$\Leftarrow$":

$$\left.\begin{aligned} &\triangle ABC \\ &AA_1, BB_1 \text{ težišne linije} \\ &AA_1 \cong BB_1 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \triangle ABC \text{ jkk}$$

Na pp$[A, A_1)$ uzmimo tačku Q: $A - A_1 - Q$ i $AA_1 \cong A_1Q$
Na pp$[B, B_1)$ uzmimo tačku P: $B - B_1 - P$ i $BB_1 \cong B_1P$



$$\left.\begin{aligned} AB_1 &\cong B_1C \\ \measuredangle AB_1P &\cong \measuredangle BB_1C \text{ (unakrsni)} \\ PB_1 &\cong BB_1 \end{aligned}\right\} \xRightarrow{SUS} \triangle AB_1P \cong \triangle CB_1B \Rightarrow AP \cong BC$$

$$\left.\begin{aligned} BA_1 &\cong A_1C \\ \measuredangle BA_1Q &\cong \measuredangle AA_1C \text{ (unakrsni)} \\ AA_1 &\cong A_1Q \end{aligned}\right\} \xRightarrow{SUS} \triangle BA_1Q \cong \triangle CA_1A \Rightarrow BQ \cong AC$$

Posmatrajmo $\triangle ABP$ i $\triangle ABQ$.
Ako bi bilo $AC < BC$ dobili bi $BQ < AP$

$$\left.\begin{aligned} AB &\cong AB \\ AQ &\cong BP \\ BQ &< AP \end{aligned}\right\} \xRightarrow{10. \text{ zadatak}} \measuredangle BAQ < \measuredangle ABP$$

Sad bi za trouglove $\triangle ABB_1$ i $\triangle ABA_1$ vrijedilo

$$\left.\begin{array}{l} AB \cong AB \\ BB_1 \cong AA_1 \\ \measuredangle BAA_1 < \measuredangle ABB_1 \end{array}\right\} \xRightarrow{10.\text{ zadatak}} BA_1 < AB_1$$

$$\Downarrow$$

$$BC < AC$$

kontradikcija (sa tvrdnjom da je $AC < BC$).

Na isti način bi došli do kontradikcije ako bi pretpostavili da je $AC > BC$.

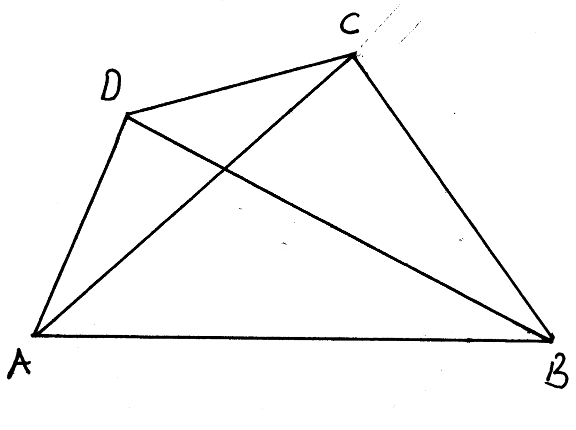
Prema tome mora biti $AC \cong BC$ tj. $\triangle ABC$ j.k.

q.e.d.

U konveksnom četverouglu $\square ABCD$, AB je najveća, a CD najmanja stranica. Dokazati da je $\measuredangle D > \measuredangle B$ i $\measuredangle C > \measuredangle A$.

Rj.

$$\left.\begin{array}{l} \square ABCD \text{ konv.} \\ AB \text{ najveća str.} \\ AC \text{ najmanja str.} \end{array}\right\} \Rightarrow \measuredangle D > \measuredangle B \quad i \quad \measuredangle C > \measuredangle A$$



$\triangle ABD$, $AB > AD$

$\Rightarrow \measuredangle ADB > \measuredangle ABD \quad \ldots(1)$

$\triangle BCD$, $CD < BC$

$\Rightarrow \measuredangle CDB > \measuredangle DBC \quad \ldots(2)$

$(1)+(2)$:

$\measuredangle ADB + \measuredangle CDB > \measuredangle ABD + \measuredangle DBC$

$\measuredangle CDA > \measuredangle ABC$

$\measuredangle D > \measuredangle B$

q.e.d.

$\triangle ABC$, $AB > BC$

$\measuredangle ACB > \measuredangle CAB \quad \ldots(3)$

$\triangle ACD$, $DC < AD$

$\measuredangle ACD > \measuredangle DAC \quad \ldots(4)$

$(3)+(4)$:

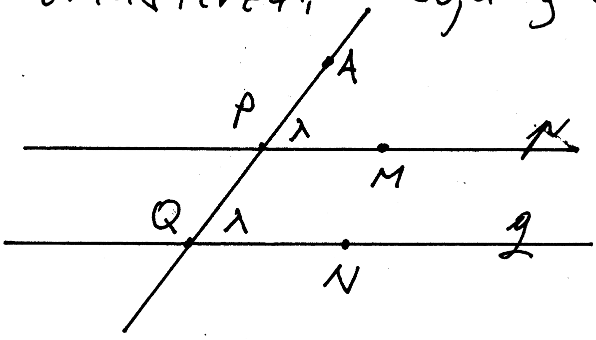
$\measuredangle ACB + \measuredangle ACD > \measuredangle CAB + \measuredangle DAC$

$\measuredangle BCD > \measuredangle DAB$

$\measuredangle C > \measuredangle A$

q.e.d.

Pretpostavimo da je dokazana teorema o uglovima na transferzali, koja glasi:



$\measuredangle APM \cong \measuredangle AQN = \lambda$

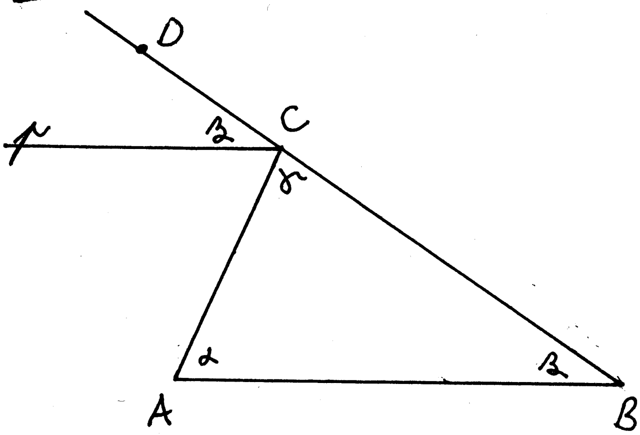
akko $p \parallel q$

Pomoću ove teoreme možemo uraditi zadatak broj 1 i na drugi način:

\# Vanjski ugao trougla je veći od oba unutrašnja nesusjedna ugla. Zbir uglova u trouglu je ravan ugao. Dokazati.

Rj. ΔABC, $\measuredangle C'$ vanjski ugao kod vrha C $\Rightarrow$ $\measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C =$ ravan ugao

$\measuredangle C' > \measuredangle A$ i $\measuredangle C' > \measuredangle B$



Neka je dat ΔABC.

Za tačke B i C $\exists D: B-C-D$

Uvedimo oznake $\measuredangle BAC = \alpha$

$\measuredangle ABC = \beta$

$\measuredangle BCA = \gamma$

Prema aksiomama podudarnosti postoji poluprava p sa početkom tačkom C i takva $p \subseteq pl[p(B,C), A)$ i $\measuredangle DCp \cong \measuredangle ABC = \beta$

$\measuredangle pCD \cong \measuredangle ABC = \beta$ i $p(B,D)$ transferzala $\Rightarrow p(A,B) \parallel p$

$p(A,B) \parallel p$ i $p(A,C)$ transferzala $\Rightarrow \measuredangle CAB = \measuredangle ACp = \alpha$

Prema tome $\measuredangle BCD =$ ravan ugao, $\measuredangle BCD = \measuredangle BCA + \measuredangle ACp + \measuredangle pCD$

tj. $\alpha + \beta + \gamma =$ ravan ugao

q.e.d.

Ugao $\measuredangle ACD$ je vanjski ugao trougla kod vrha C. Imamo

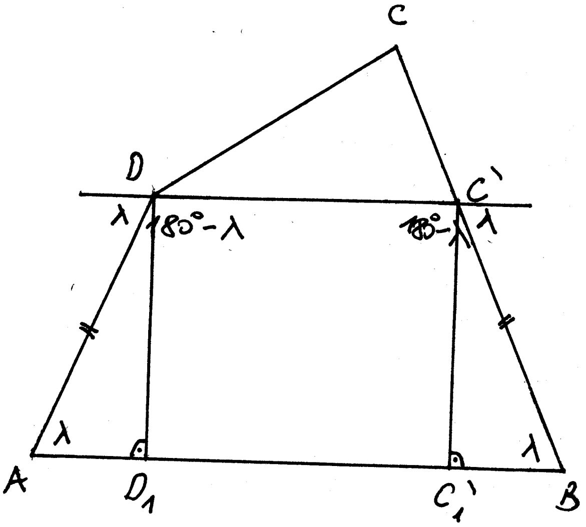
$\measuredangle ACD = \measuredangle ACp + \measuredangle pCD = \alpha + \beta \Rightarrow \measuredangle C' > \measuredangle A$ i $\measuredangle C' > \measuredangle B$

q.e.d.

(#) U konveksnom četvorouglu $\square ABCD$ je $\measuredangle A = \measuredangle B$ i $BC > AD$. Dokazati da je $\measuredangle C < \measuredangle D$.

Rj.

$$\left.\begin{array}{l}\square ABCD \text{ konv.}\\ \measuredangle A = \measuredangle B = \lambda \\ BC > AD\end{array}\right\} \Longrightarrow \measuredangle C < \measuredangle D$$



Na stranici BC uzmimo tačku C' tako da je $BC' \cong AD$. Neka su D_1 i C_1' ortogonalne projekcije tački D i C' na pravu $p(A,B)$.

Imamo

$$\left.\begin{array}{l}\measuredangle DD_1A \cong \measuredangle C'C_1'B = 90° \\ \measuredangle DAD_1 \cong \measuredangle C'BC_1' = \lambda \\ AD \cong BC'\end{array}\right\} \xRightarrow{UUS} \triangle AD_1D \cong \triangle BC_1'C' \Downarrow DD_1 \cong C'C_1'$$

Kako je još $DD_1 \parallel C'C_1'$ $\Longrightarrow$ $\square D_1C_1'C'D$ je paralelogram $\Rightarrow$ $p(A,B) \parallel p(C',D)$ $\Longrightarrow$ $\square ABC'D$ je jkk trapez.

$\measuredangle DC'B$ je vanjski ugao $\triangle DC'C$ pa imamo

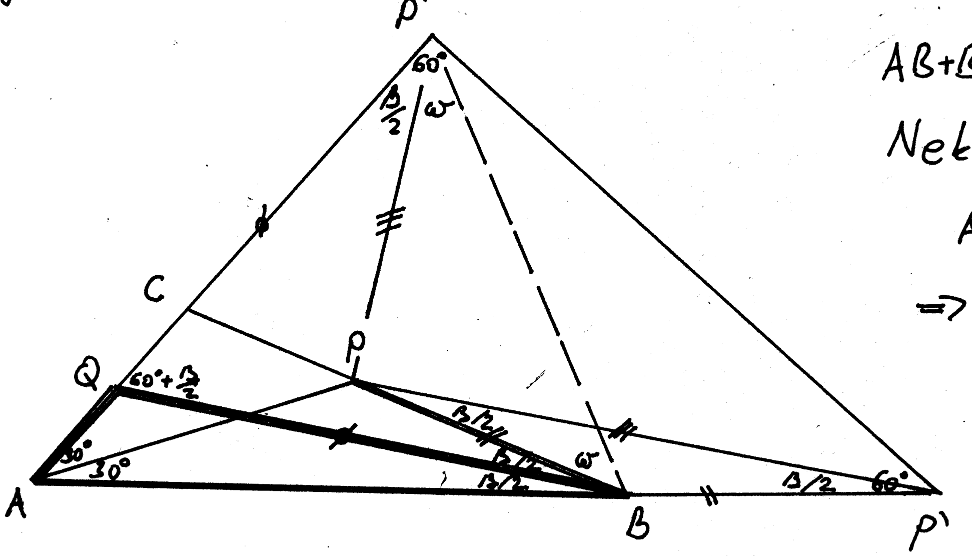
$$\measuredangle C = \measuredangle DCC' < \measuredangle DC'B = 180° - \lambda = \measuredangle ADC' < \measuredangle ADC = \measuredangle D$$

tj. $\measuredangle C < \measuredangle D$ q.e.d.

Primetite da dokaz nije isti u slučaju da smo pretpostavili da je λ tup ugao.
Slučaj; λ = tup ugao uraditi za vježbu
(uputa: SUS, SSS)

(#) U trouglu ΔABC, AP polovi ugao $\measuredangle BAC$, sa P na BC, i duž BQ polovi $\measuredangle ABC$ sa Q na CA. Zna se da je $\measuredangle BAC = 60^\circ$ i da je $AB + BP \cong AQ + QB$. Odrediti ostale uglove u ΔABC.

Rj.



$AB + BP \cong AQ + QB$

Neka je $P' \in p(A,B)$:

$A - B - P'$; $BP \cong BP'$

$\Rightarrow \Delta PBP'$ jkk

$\Rightarrow \measuredangle BP'P \cong \measuredangle BPP' = \frac{\beta}{2}$

Neka je $P'' \in p[A,C)$: $AP'' \cong AP'$ $\Longrightarrow$ $\Delta AP'P''$ jks ($\measuredangle PAP'' = 60^\circ$)

$$\left.\begin{array}{l} AP'' \cong AP' \\ \measuredangle P''AP = \measuredangle PAP' = 30^\circ \\ AP \cong AP \end{array}\right\} \overset{SUS}{\Longrightarrow} \Delta P''AP \cong \Delta P'AP$$

$$\Downarrow$$

$$\measuredangle AP''P \cong \measuredangle AP'P = \frac{\beta}{2} \quad \wedge \quad PP'' \cong PP'$$

$$AP'' \cong \underline{AQ} + QP'' \cong AB + BP' \cong AB + BP \cong \underline{AQ} + QB \Rightarrow QP'' \cong QB$$

Dokažimo da su tačke B, P, P'' kolinearne tj. $P'' \equiv C$.
Ako tačke B, P i P'' nisu kolinearne imali bi slučaj kao na slici ili bi tačka P bila sa druge strane $p(B,P'')$.
Kako je $\Delta QBP''$ jkk ($QB \cong QP''$) i $\measuredangle QBP \cong \measuredangle QP''P$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \measuredangle PP''B \cong \measuredangle PBP'' = \omega \Rightarrow PP'' \cong PB \overset{(PP'' \cong PP')}{\Longrightarrow} \Delta PBP' \text{ jks}$$

$$\Rightarrow \frac{\beta}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\beta}{2} = 180^\circ \text{ tj } \beta = 120^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = 180^\circ$$

\# kontradikcija ($\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$)

Pretpostavka da tačke B, P i P'' nisu kolinearne nas vodi u kontradikciju pa pretpostavka nije tačna. Prema tome $B - P - P'' \Rightarrow C \equiv P''$.
Sad u ΔQBC imamo $60^\circ + \frac{\beta}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\beta}{2} = 180^\circ$

$\frac{\beta}{2} = \gamma = \measuredangle PP''A$

$$\Rightarrow \beta = 80^\circ \; ; \; \gamma = 40^\circ.$$

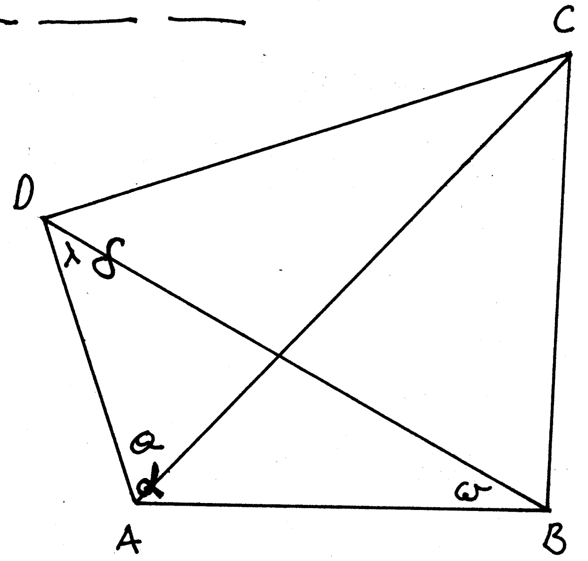
$$(\alpha = 60^\circ)$$

(#) Dokazati da je u svakom konveksnom četvorouglu bar jedna stranica manja od veće dijagonale.

Rj.:

$\square ABCD$ konveksan četvorougao
AC, BD dijagonale četvorougla
$AC < BD$

$\Rightarrow$ bar jedna od stranica AB, BC, CD ili AD je manja od dijagonale BD



Pretpostavimo suprotno tvrdnji, tj. da su sve stranice četvorougla veće od veće dijagonale četvorougla, i dođimo u kontradikciju.

Posmatrajmo $\triangle ABD$, $\alpha < \lambda$ i $\alpha < \omega$ (BD najmanja stranica).

$\alpha = \measuredangle DAC + \measuredangle CAB$, $\lambda = \measuredangle ADB < \measuredangle ADB + \measuredangle CDB = \measuredangle ADC = \delta$

$\theta = \measuredangle DAC$, kako je $\alpha < \lambda$ to je i $\theta < \delta$

pa u $\triangle DAC$ imamo $DC < AC$.

Iz pretpostavke zadatka $AC < BD \Rightarrow DC < BD$

#kontradikcija (pretpostavili smo da su sve stranice $\triangle$ veće od dijagonale BD)

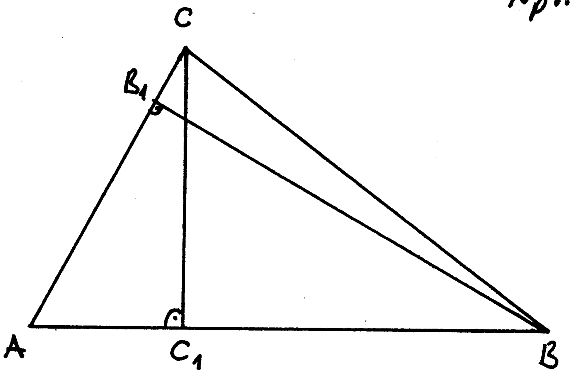
Pretpostavka suprotna tvrdnji nas vodi u kontradikciju pa nije tačna.

Bar jedna od stranica trougla je manja od veće dijagonale. q.e.d.

(#) Dokazati da u trouglu postoji najviše jedna stranica koja je manja od njoj odgovarajuće visine.

Rj. $\Delta ABC \Rightarrow$ najviše jedna stranica je manja od njoj odgovarajuće visine.

Prije nego što počnemo rješavati zadatak, šta možemo reći o stranici koja je manja od njoj odgovarajuće visine.



Npr. $AB < CC_1$

ΔAC_1C, $\measuredangle AC_1C = 90^\circ \Rightarrow AC > CC_1$

pa kako je $CC_1 > AB \Rightarrow AC > AB$

ΔCC_1B, $\measuredangle CC_1B = 90^\circ \Rightarrow BC > CC_1$

pa kako je $CC_1 > AB \Rightarrow BC > AB$

Stranica koja je manja od njoj odgovarajuće visine je najmanja stranica u trouglu. ...(*)

Pretpostavimo suprotno tvrdnji, tj. pretpostavimo da postoje dvije stranice u trouglu koje su manje od njoj odgovarajuće visine, npr. $AB < CC_1$ i $AC < BB_1$.

$$AB < CC_1 \overset{(*)}{\Rightarrow} AB < AC \text{ i } AB < BC$$

$$AC < BB_1 \overset{(*)}{\Rightarrow} AC < AB$$

kontradikcija
(već smo pokazali da je $AB < AC$)

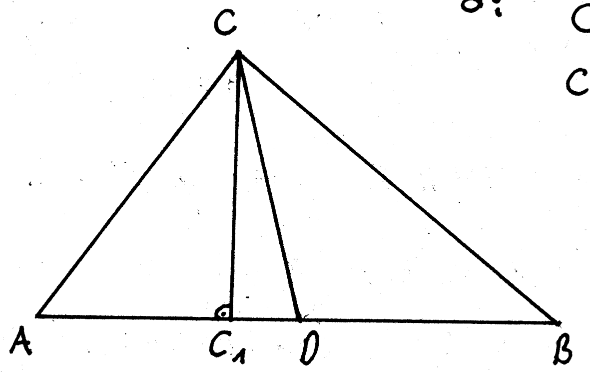
Pretpostavka suprotna tvrdnji nas vodi u kontradikciju pa nije tačna.
U trouglu postoji najviše jedna stranica koja je manja od njoj odgovarajuće visine.

q.e.d.

(#) Između svih trouglova sa datim zbirom težišnih linija odrediti onaj sa najvećim zbirom visina.

Rj.

U svakom trouglu visina spuštena iz nekog vrha je manja ili jednaka težišnoj liniji spuštenoj iz tog vrha.



d: CC_1 - visina iz vrha C

CD - težišnica iz C

1° $C_1 \equiv D \Rightarrow CC_1 \cong CD$

2° $C_1 \not\equiv D$

U $\triangle CC_1D$, $\measuredangle CC_1D = 90° \Rightarrow$

$\Rightarrow CD > CC_1$

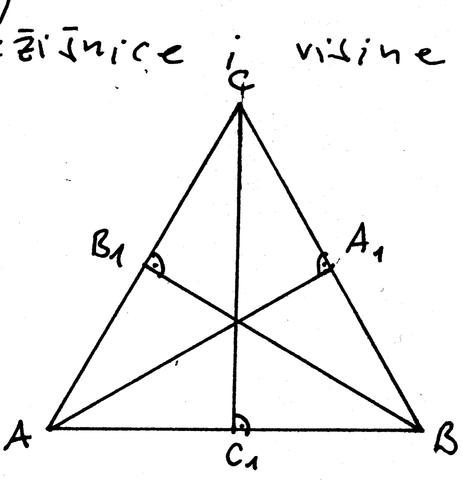
Prema tome $h_a \leq t_a$, $h_b \leq t_b$ i $h_c \leq t_c$

Zbir visina $h_a+h_b+h_c$ je ograničen odozgo zbirom težišnica $t_a+t_b+t_c$.

Najmanja gornja granica za $h_a+h_b+h_c$ je onaj zbir težišnih linija $t_a+t_b+t_c$ za koji vrijedi $h_a+h_b+h_c = t_a+t_b+t_c$

$\Rightarrow h_a = t_a$, $h_b = t_b$ i $h_c = t_c$.

Između svih trouglova sa datim zbirom težišnih linija, najveći zbir visina ima onaj trougao u kome se težišnice i visine poklapaju.



$\overset{SUS}{\Rightarrow} \triangle AC_1C \cong \triangle BC_1C$

$\Downarrow$

$AC \cong BC$

$\overset{SUS}{\Rightarrow} \triangle ABA_1 \cong \triangle ACA_1$

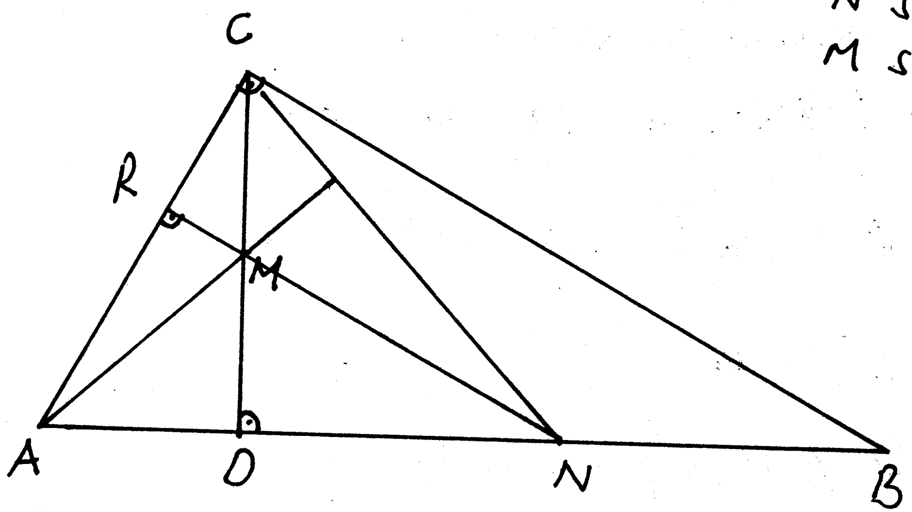
$\Downarrow$

$AB \cong AC$

Riječ je o jednakostraničnom trouglu.

(#) Tačka D je podnožje visine koja odgovara hipotenuzi AB pravouglog trougla ΔABC, a M i N su redom sredine duži CD i BD. Dokazati da je $p(A,M) \perp p(C,N)$.

Rj.



$$\left.\begin{array}{l} N \text{ sredina } BD \\ M \text{ sredina } CD \end{array}\right\} \Rightarrow MN \text{ srednja linija } \Delta DBC$$

$\Rightarrow MN \parallel BC \Rightarrow p(M,N) \perp AC$

($p(M,N) \parallel p(B,C)$ i $p(A,C)$ transferzala)

$p(M,N) \cap AC = \{R\}$

U ΔANC tačka M je presjek visina CD i NR

$\Rightarrow M$ je ortocentar trougla

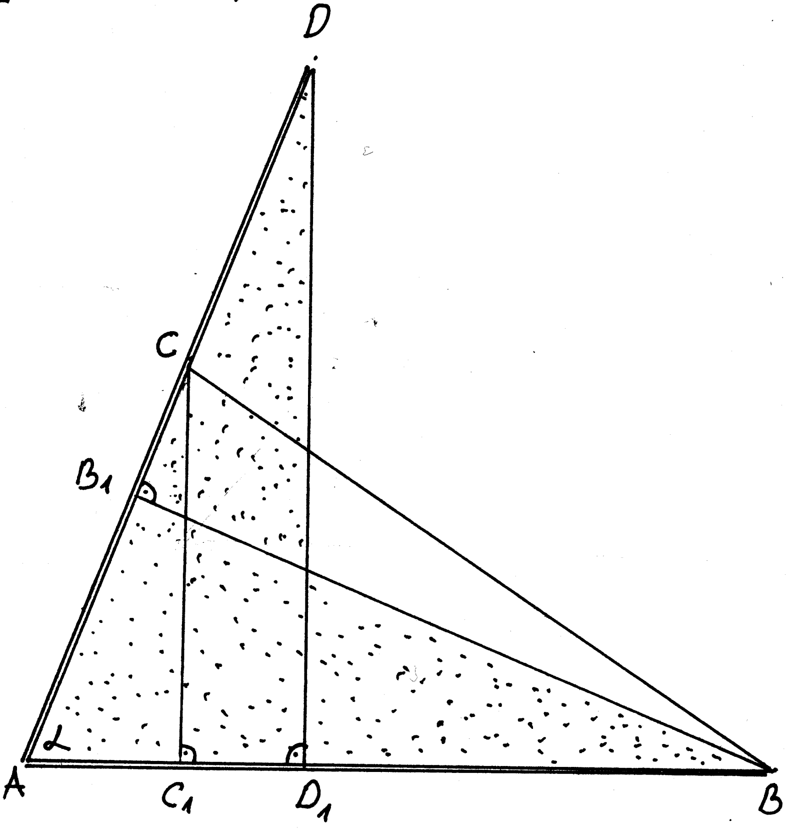
$\Rightarrow p(A,M) \perp NC$ q.e.d.

(#) Dokazati da u trouglu postoji najviše jedna stranica koja je manja od njoj odgovarajuće visine.

Rj. postavka zadatka:

$\triangle ABC \implies$ najviše jedna stranica je manja od njoj odgovarajuće visine.

— — —



Pretpostavimo suprotno tvrdnji tj. pretpostavimo da postoje dvije stranice koje su manje od njima odgovarajući visina pa dođimo u kontradikciju.
Neka su CC_1 i BB_1 visine trougla $\triangle ABC$ takve da je

$$AB < CC_1$$

i $$AC < BB_1.$$

Pretpostavimo da je $AC < AB$ (dokaz bi bio isti i da je $AC = AB$ ili $AC > AB$).

Stranicu AC produžimo do tačke D tako da je $AB \cong AD$.
Neka je D_1 ortogonalna projekcija tačke D na $p(A,B)$.
Posmatrajmo $\triangle ABB_1$ i $\triangle ADD_1$

$$\left.\begin{array}{l} \measuredangle BB_1A \cong \measuredangle DD_1A = \text{prav ugao} \\ \measuredangle BAB_1 \cong \measuredangle DAD_1 = \alpha \\ AB \cong AD \end{array}\right\} \xRightarrow{UUS} \triangle ABB_1 \cong \triangle ADD_1$$

$$\Downarrow$$

$$DD_1 \cong BB_1$$

Kako je poredak $A-C-D \implies DD_1 > CC_1$

Sad imamo $AB < CC_1 < DD_1 \cong BB_1$ tj. $AB < BB_1$
kontradikcija (u $\triangle ABB_1$ stranica AB je najveća)

Pretpostavka suprotna tvrdnji nas vodi u kontradikciju pa nije tačna. Prema tome
najviše jedna stranica je manja od njoj odgovarajuće visine
q.e.d.

Transformacije podudarnosti u ravni

Identična transformacija (identitet)

Identična transformacija ili identitet preslikava svaku tačku ravni u samu sebe. Obilježavamo je sa id.

$$id(A)=A, \quad id(a)=a$$

$$id(\alpha)=\alpha$$

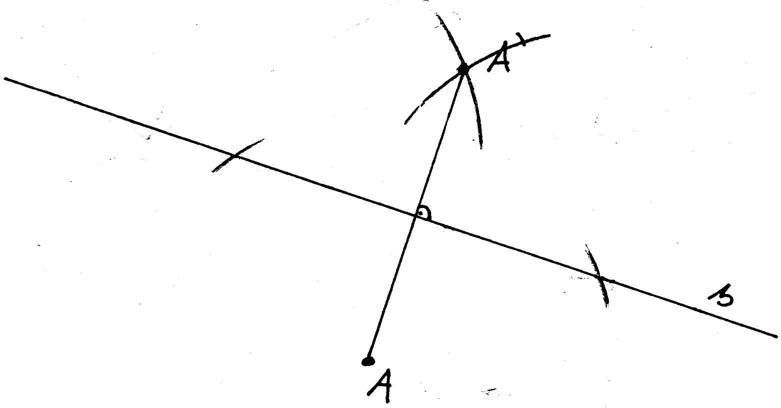
Osna simetrija

$$\sigma_s : \alpha \to \alpha$$

Za osnu simetriju σ_s vrijede dvije osobine:

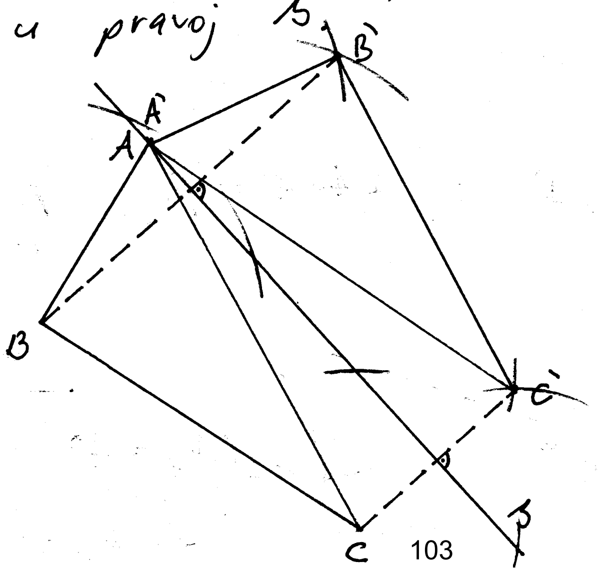
a) $S \in s \Rightarrow \sigma_s(S)=S$

b) $S \notin s \Rightarrow \sigma_s(A)=A'$: s simetrala duži AA'



1. Data je prava s i trougao ΔABC (takav da $A \in s$, $B, C \notin s$). Trougao ΔABC preslikati osnom simetrijom s osom u pravoj s.

Rj.



$\sigma_s(\Delta ABC) = \Delta A'B'C'$

gdje $A \equiv A'$

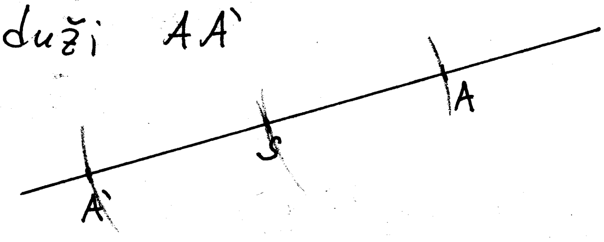
Centralna simetrija

$$\sigma_S : \alpha \to \alpha$$

Centralna simetrija σ_S ispunjava dvije osobine:

a) $\sigma_S(S) = S$

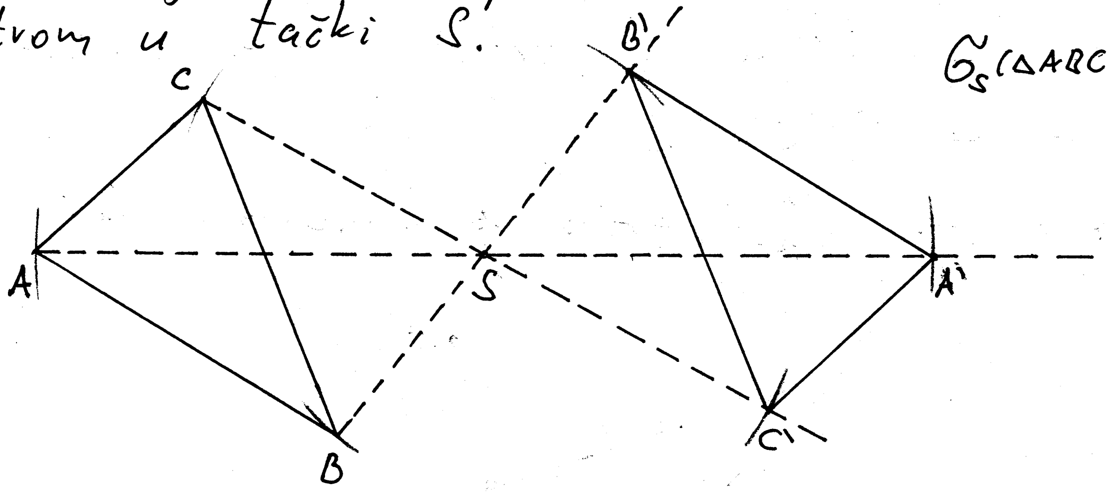
b) $\sigma_S(A) = A'$: S sredina duži AA'



2. Dat je trougao $\triangle ABC$ i tačka S u vanjskoj oblasti trougla. Trougao $\triangle ABC$ preslikati centralnom simetrijom s centrom u tački S.

$$\sigma_S(\triangle ABC) = \triangle A'B'C'$$

Rj.



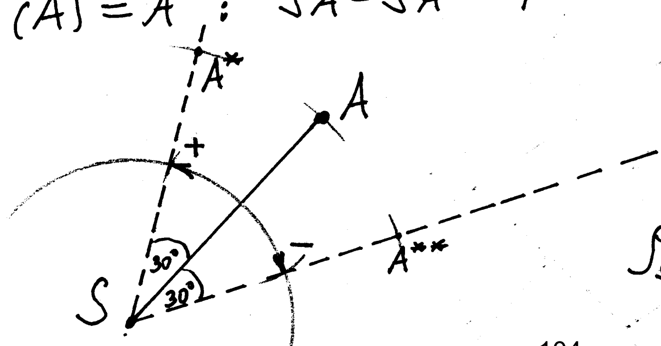
Rotacija

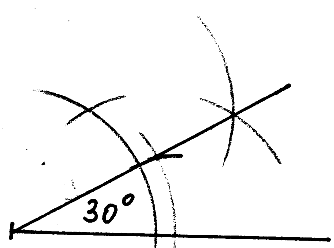
$$\rho_{S,\ ,\pm} : \alpha \to \alpha$$

Svaka rotacija $\rho_{S,\varphi,\pm}$ ispunjava dvije osobine:

a) $\rho_{S,\varphi,\pm}(S) = S$

b) $\rho_{S,\varphi,\pm}(A) = A'$: $SA = SA'$ i $\measuredangle ASA' = \varphi$





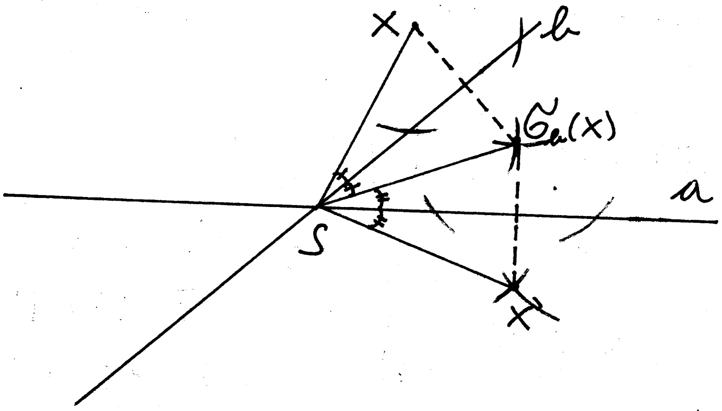
$\rho_{S,30°,+}(A) = A^*$

$\rho_{S,30°,-}(A) = A^{**}$

Rotacija se definiše kao kompozicija dvije osne simetrije.

$$\sigma_a \circ \sigma_b \quad (a \not\equiv b), \quad (f \circ g)(x) = f(g(x))$$

$$\sigma_a \circ \sigma_b(x) = \sigma_a(\sigma_b(x)) = x'$$



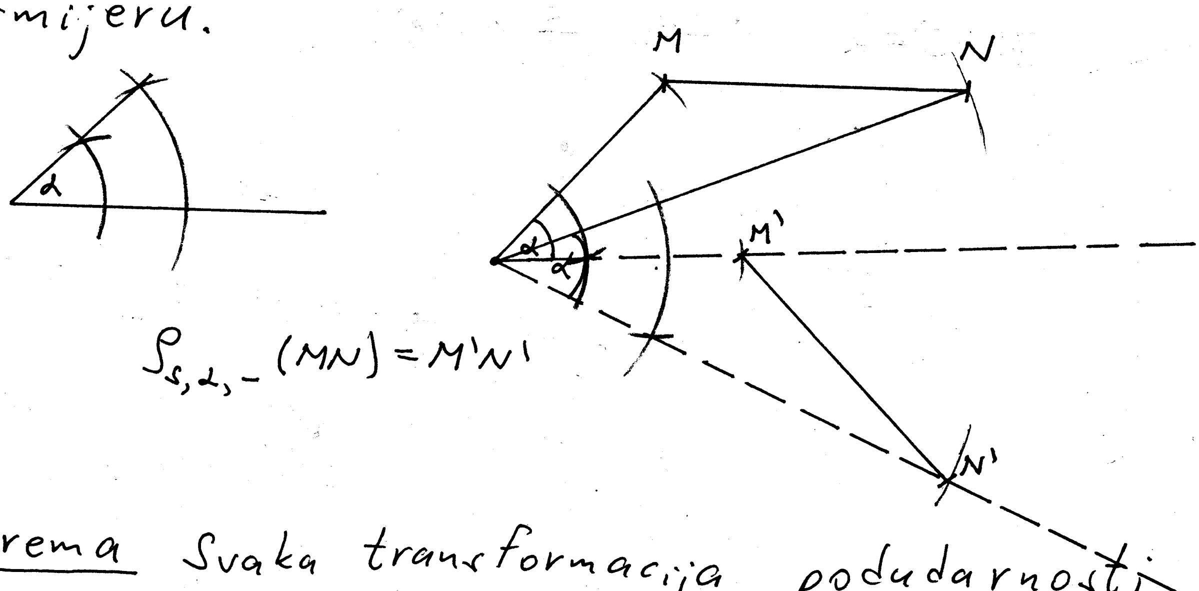
$SX = SX'$

$\measuredangle XSX' = 2 \cdot \measuredangle aSb$

$\sigma_a \circ \sigma_b(x)$ je rotacija tačke x oko tačke S ($\{S\} = a \cap b$) za ugao $2 \cdot \measuredangle aSb$.

3. Data je duž MN, ugao α i tačka $S \notin MN$. Duž MN rotirati oko tačke S za ugao α u negativnom smijeru.

Rj.



$\rho_{S,\alpha,-}(MN) = M'N'$

<u>Teorema</u> Svaka transformacija podudarnosti u ravni jednoznačno je određena djelovanjem na tri nekolinearne tačke.

4. Neka su h i h' poluprave pravih a i a' respektivno sa početnim tačkama A i A'. Neka su α i α' uočene poluravni s obzirom na prave a i a' redom. Dokazati da postoji tačno jedna transformacija podudarnosti koja preslikava tačku A u A', polupravu h u h' i poluravan α u α'.

Rj. $\left.\begin{array}{l} h \text{ i } h' \text{ polupr. sa poč. tačkama } A \text{ i } A' \\ a, a' \text{ prave} \\ h \subseteq a,\ h' \subseteq a' \\ \alpha \text{ i } \alpha' \text{ ravni sa ivicom u } a \text{ i } a' \end{array}\right\} \Rightarrow \exists!$ transf. pod. Π: $\Pi(A)=A'$, $\Pi(h)=h'$, $\Pi(\alpha)=\alpha'$

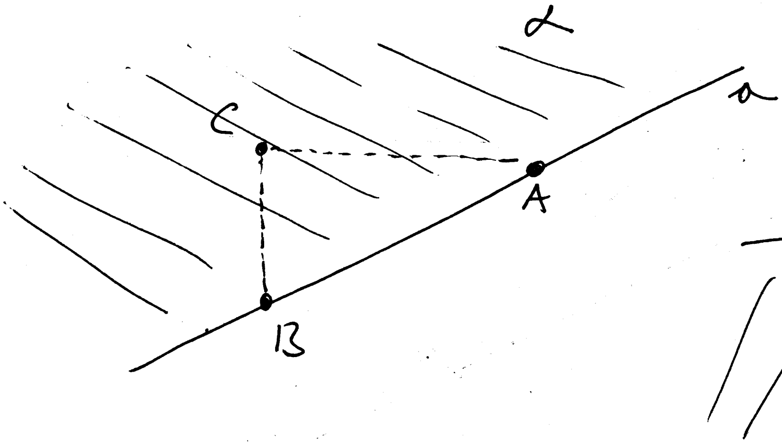
— — —

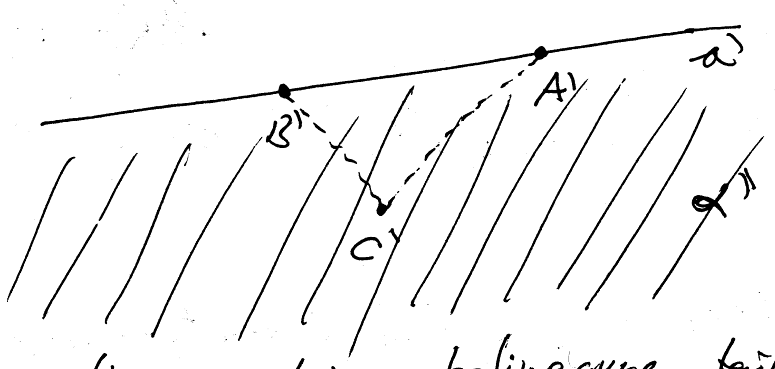
Da bi smo pokazali egzistenciju bilo koje transformacije podudarnosti potrebno ju je definisati na tri nekolinearne tačke.

Za naš zadatak primjetimo da

a) $\forall B \in h \quad \exists!\, B' \in h' : AB \cong A'B'$

b) $\forall C \in \alpha \quad \exists!\, C' \in \alpha' : \triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.





Transformaciju Π ćemo definisati na tri nekolinearne tačke

$\Pi(A) = A'$

$\Pi(B) = B'$ gdje je $B \in h$ i $AB \cong A'B'$

$\Pi(C) = C'$ gdje je $C \in \alpha$ i $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

Ovako definisana transformacija podudarnosti Π preslikava

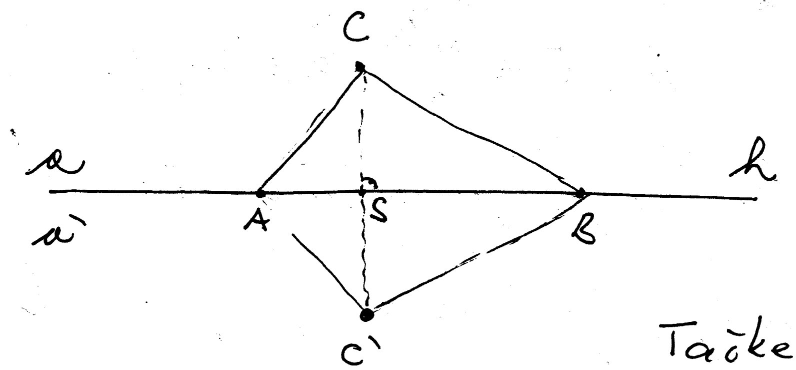
tačku A u A', polupravu h u h' i ravan α u α'.
Jedinstvenost ove transformacije slijedi iz navedene teoreme.

Primijetimo da se u zadatku ne traži da odredimo šta je Π, nego da pokažemo da postoji. Prema tome zadatak je riješen.

(5.) Odrediti sve transformacije podudarnosti u ravni koje preslikavaju polupravu h na samu sebe.

Rj.
$$\left.\begin{array}{l}\text{poluprava } h \\ \text{transform. podud. } \Pi: \Pi(h)=h\end{array}\right\} \Rightarrow \Pi = ?$$

— — —



Neka je a' poluprava sa početnom tačkom A koja dopunjuje polupravu h do prave a.
Uzmimo tačku $B \in h$ i tačku $C \notin a$.
Tačke A, B i C su nekolinearne.

Pokazaćemo prvo da postoji, pa ćemo odrediti šta je u stvari ta transformacija.

a) Definišimo Π na sljedeći način

$\Pi(A)=A$ $\qquad$ A, B, C nekolinearne $\Rightarrow \Pi(h)=h$

$\Pi(B)=B$ $\qquad$ šta je Π?

$\Pi(C)=C$

Identična transformacija svaku svoju tačku preslikava na samu sebe pa je
$\Pi \equiv id$ tj. $id(h)=h$.

b) Posmatrajmo transformaciju podudarnosti koja ima sljedeće osobine:
$\Pi(A)=A$ $\qquad$ A, B, C nekolinearne
$\Pi(B)=B$ $\qquad$ $\Pi(h)=h$
$\Pi(C)=C'$: $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$

Šta je Π?

C i C' leže u različitim poluravnima s ivicom u pravoj a

$\Rightarrow CC' \cap a = \{S\} \quad \Rightarrow \quad \sphericalangle CSA \cong \sphericalangle C'SA =$ prav ugao

$\Delta ABC \cong \Delta ABC' \quad \Rightarrow \quad AC = AC'$

$$\left.\begin{array}{l} AC \cong A'C' \\ AS \cong AS \\ \sphericalangle ASC \cong \sphericalangle ASC' = \text{prav ugao} \end{array}\right\} \xRightarrow{SSU} \Delta ASC \cong \Delta ASC'$$

(ugao naspram veće stranice)

$\Downarrow$

$CS \cong C'S$

$\Downarrow$

a simetrala duži CC'

pa $\sigma_a(C) = C'$

Sad imamo

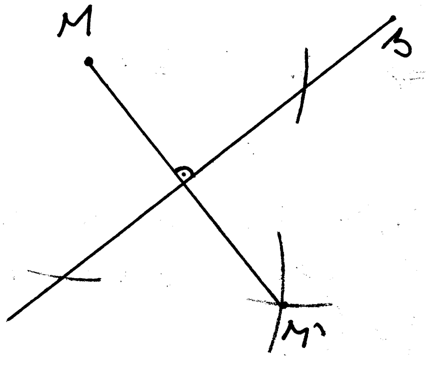
$$\left.\begin{array}{ll} \sigma_a(A) = A & (A \in a) \\ \sigma_a(B) = B & (B \in a) \\ \sigma_a(C) = C' & \end{array}\right\} \Rightarrow \Pi \equiv \sigma_a$$

tj. $\sigma_a(h) = h$

Našli smo dvije transformacije podudarnosti

1. identitet
2. osna simetrija u pravoj koja sadrži polupravu h.

Osobine osne simetrije



$$\sigma_s(\sigma_s(M)) = M$$

$$M \xrightarrow{\sigma_s} M'$$

$$M \xleftarrow{\sigma_s} M'$$

$$\sigma_s \circ \sigma_s = \sigma_s^2 = id$$

involutivna transformacija (involucija)

(transformacija koja je sama sebi inverzna)

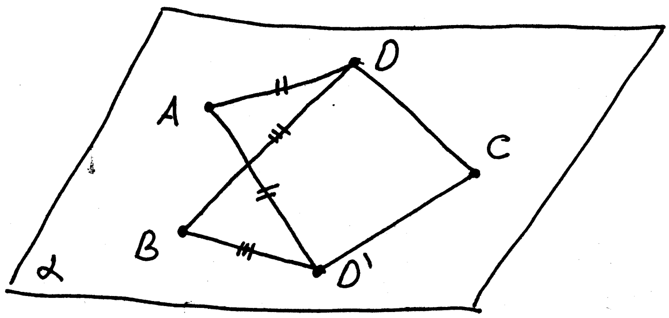
Involucija ne mora biti podudarnost.

\# Ako je Π transformacija podudarnosti za koju važi $\Pi(A)=A$, $\Pi(B)=B$, $\Pi(C)=C$ gdje su A, B i C tri nekolinearne tačke, tada je Π identitet. Dokazati.

Rj. postavku zadatka:

$$\left.\begin{array}{l} \Pi(A)=A,\ \Pi(B)=B,\ \Pi(C)=C \\ A,B,C \text{ nekolinearne tačke} \\ A\not\equiv B,\ A\not\equiv C,\ B\not\equiv C \end{array}\right\} \Rightarrow \Pi \text{ identitet}$$

Neka je α ravan koja sadrži tačke A, B, C. Uzmimo proizvoljnu tačku D koja pripada ravni α.



Neka je $\Pi(D)=D'$. ($D\not\equiv A$, $D\not\equiv B$ i $D\not\equiv C$)

Ako pokažemo da je $D\equiv D'$, kako je D proizvoljna tačka ravni time ćemo pokazati da je Π identitet.

Pretpostavimo da je $D\not\equiv D'$.

Transformacija podudarnosti čuva dužine pa je

$AD \cong \Pi(A)\Pi(D) \cong AD' \Rightarrow$ A pripada simetrali duži DD' (1)

$BD \cong \Pi(B)\Pi(D) \cong BD' \Rightarrow$ B pripada simetrali duži DD' (2)

$CD \cong \Pi(C)\Pi(D) \cong CD' \Rightarrow$ C pripada simetrali duži DD' (3)

Kako su A, B i C nekolinearne tačke to se dvije tačke moraju nalaziti sa iste strane $p(D,D')$ pa neka su to tačke A i B

Iz (1) i (2) $\Rightarrow A\equiv B$

\# kontradikcija.

Pretpostavka da je $D\not\equiv D'$ nas vodi u kontradikciju pa nije tačna. Prema tome $D\equiv D' \Rightarrow \Pi$ je identitet

q. e. d.

(#) Neka je $\sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma_c = \sigma_d$. Dokazati sljedeća tvrđenja:

a) Ako se prave a i b sijeku u tački S, tada se i prave c i d sijeku u tački S;

b) Ako su prave a i b normalne na pravu s, tada su i prave c i d normalne na pravu s.

Rj. a) postavka zadatka:

$$\left.\begin{array}{l} \sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma_c = \sigma_d \\ a \cap b = \{S\} \end{array}\right\} \Rightarrow c \cap d = \{S\}$$

$\sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma_c = \sigma_d \quad / \circ \sigma_c$ sa desne strane

$\sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma_c \circ \sigma_c = \sigma_d \circ \sigma_c$

$\sigma_a \circ \sigma_b = \sigma_d \circ \sigma_c = \gamma$

$\gamma(S) = (\sigma_a \circ \sigma_b)(S) = \sigma_a(\sigma_b(S)) \overset{S \in b}{=} \sigma_a(S) \overset{S \in a}{=} S$

Prema tome $\gamma(S) = S$ ...(*)

Neka je $\sigma_c(S) = S'$, $S' \not\equiv S$. Imamo:

$\gamma(S) = (\sigma_d \circ \sigma_c)(S) = \sigma_d(\sigma_c(S)) = \sigma_d(S') \overset{(*)}{=} S$

$$\left.\begin{array}{l} \sigma_c(S) = S' \Rightarrow \text{prava } c \text{ simetrala } SS' \\ \sigma_d(S') = S \Rightarrow \text{prava } d \text{ simetrala duži } SS' \end{array}\right\} \Rightarrow c \equiv d$$

$\Downarrow$

$\sigma_d \circ \sigma_c = id \Rightarrow$

$\Rightarrow \sigma_a \circ \sigma_b = id \Rightarrow a \equiv b \Rightarrow a \cap b = a \equiv b$

kontradikcija ($a \cap b = \{S\}$).

Pretpostavka da je $\sigma_c(S) = S'$, $S' \not\equiv S$ nas vodi u kontradikciju pa nije tačna. Prema tome $\sigma_c(S) = S$. Dalje imamo

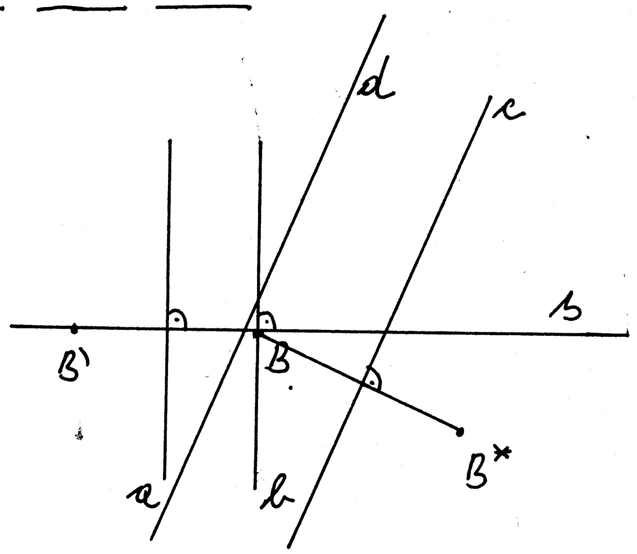
$\gamma(S) = (\sigma_d \circ \sigma_c)(S) = \sigma_d(\sigma_c(S)) = \sigma_d(S) \overset{(*)}{=} S$

$$\left.\begin{array}{l} \sigma_c(S) = S \Rightarrow S \in c \\ \sigma_d(S) = S \Rightarrow S \in d \end{array}\right\} \Rightarrow S \in c \cap d$$

tj $c \cap d = \{S\}$

b) postavka zadatka

$$\left.\begin{array}{l} \sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma_c = \sigma_d \\ a \perp s,\ b \perp s \\ s \text{ data prava} \end{array}\right\} \Rightarrow c \perp s \text{ i } d \perp s$$



Prvu stvar koju možemo primjetiti je da su prave c i d paralelne. Zašto?

Ako bi se prave c i d sijekle u nekoj tački S tada prema djelu a) zadatka $a \cap b = \{S\}$

#kontradikcija

$(a \perp s,\ b \perp s,\ a \cap b = \phi)$

Prema tome $c \parallel d$.

$$\sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma_c = \sigma_d \quad / \circ \sigma_c \text{ sa desne strane}$$

$$\sigma_a \circ \sigma_b = \sigma_d \circ \sigma_c = \gamma$$

označimo ovu transformaciju podudarnost sa γ

Neka je $b \cap s = \{B\}$

$$\gamma(B) = (\sigma_a \circ \sigma_b)(B) = \sigma_a(\sigma_b(B)) = \overset{B \in b}{=} \sigma_a(B) = B'$$

Prema tome:

$$\gamma(B) = B' \quad \dots (\Delta)$$

Neka je $\sigma_c(B) = B^*$

$$\gamma(B) = (\sigma_d \circ \sigma_c)(B) = \sigma_d(\sigma_c(B)) =$$

$$= \sigma_d(B^*) \overset{(\Delta)}{=} B' \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} c \text{ simetrala } BB^* \\ \Rightarrow d \text{ simetrala } B^*B' \\ c \parallel d \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ tačke B, B^* i B' su kolinearne.

Kako su $B, B' \in s$ to je i $B^* \in s$

$$\left.\begin{array}{l} c \text{ simetrala } BB^* \Rightarrow c \perp p(B, B^*) \\ d \text{ simetrala } B^*B' \Rightarrow d \perp p(B^*, B') \end{array}\right\} \Rightarrow c \perp s \text{ i } d \perp s$$

q.e.d.

(#) Dokazati da je proizvod tri osne simetrije osna simetrija ako i samo ako sve tri ose pripadaju eliptičnom pramenu pravih.

Napomena: Eliptičan pramen pravih je skup svih pravih koje prolaze kroz istu tačku.

Rj.

„$\Leftarrow$": $\sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma_c = \sigma_d \Rightarrow$ a, b i c pripadaju eliptičnom pramenu pravih

a, b, c, d tri različite prave

Kako pokazati da tri prave pripadaju istom eliptičnom pramenu pravih?

Trebamo pokazati da se a, b i c sijeku u istoj tački.

Neka je $a \cap b = \{S\}$

$\sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma_c = \sigma_d \quad / \circ \sigma_c$ sa desne strane

$\sigma_a \circ \sigma_b = \sigma_d \circ \sigma_c$

$\sigma_a \circ \sigma_b(S) = \sigma_d \circ \sigma_c(S) \Rightarrow \sigma_d \circ \sigma_c(S) = S$

Ako bi pretpostavili da je $\sigma_c(S) = S'$ $(S' \not\equiv S)$ dobili bi da

$\sigma_d \circ \sigma_c(S) = \sigma_d(S') = S \Rightarrow$

$\left.\begin{array}{l} c \text{ simetrala } SS' \\ d \text{ simetrala } SS' \end{array}\right\} \Rightarrow c \equiv d$

kontrad. (sa $c \not\equiv d$)

Prema tome ako je

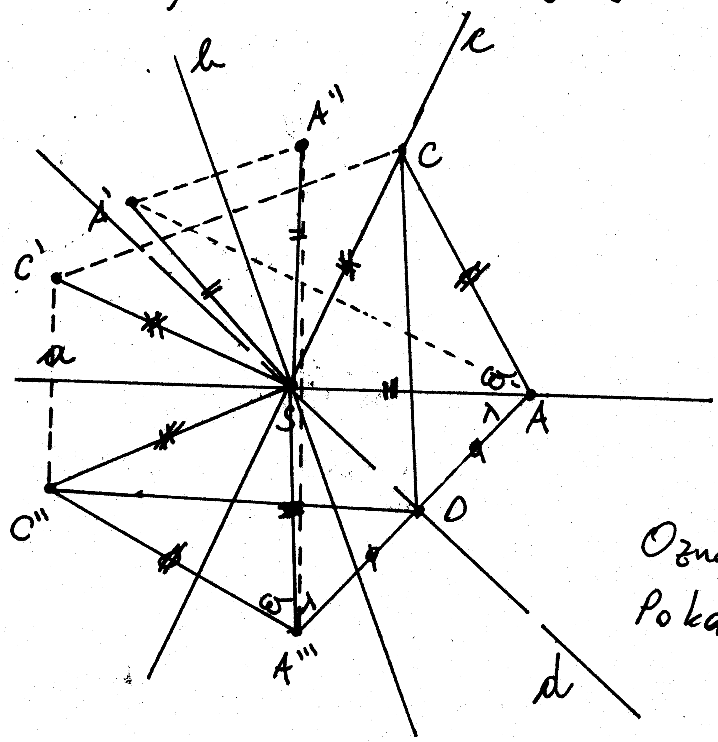
$\sigma_d \circ \sigma_c(S) = S$ i

$\sigma_c(S) = S$ to znači da se c i d sijeku u tački S. (to je moguće samo u slučaju)

$\Rightarrow a \cap b \cap c = \{S\} \Rightarrow$ a, b i c pripadaju istom eliptičnom pramenu pravih

„$\Rightarrow$": a, b, c pripadaju eliptičnom pramenu $\Rightarrow \sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma_c$ je osna simetrija.

Neka je $a \cap b \cap c = \{S\}$. Označimo sa $\gamma = \sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma_c$



a) posmatrajmo tačku S

$\gamma(S) = S$

b) uzmimo proizvoljnu tačku $A \in a$, $A \neq S$. Neka je

$\sigma_c(A) = A'$, $\sigma_b(A') = A''$, $\sigma_a(A'') = A'''$

tj. $\gamma(A) = A'''$

Označimo sa d simetralu duži AA''', Pokažimo da je $S \in d$.

$$\left.\begin{array}{l} \sigma_c(A) = A' \Rightarrow SA \cong SA' \\ \sigma_b(A') = A'' \Rightarrow SA' \cong SA'' \\ \sigma_a(A'') = A''' \Rightarrow SA'' = SA''' \end{array}\right\} \Rightarrow SA \cong SA'''$$

$\Delta SA'''A$ je jkk sa osnovicom AA''' $\Rightarrow$ $S \in d$

(d sadrži visinu)

c) Uzmimo proizvoljnu tačku $C \in c$, $C \neq S$. Neka je

$\sigma_c(C) = C$, $\sigma_b(C) = C'$, $\sigma_a(C') = C''$ tj. $\gamma(C) = C''$.

Pokažimo da je d simetrala duži CC''.

Označimo sa $\{D\} = d \cap AA'''$.

Iz dela b) smo dobili da je $AD \cong A'''D$ i $\measuredangle DAS \cong \measuredangle DA'''S = \lambda$

Podudarnost čuva dužine pa je $AC \cong \gamma(A)\gamma(C) = A'''C''$

Dalje imamo
$$\left.\begin{array}{l} CS \cong C''S \\ AC \cong A'''C'' \\ AS \cong A'''S \end{array}\right\} \xRightarrow{SSS} \Delta A'''SC'' \cong \Delta ASC$$
$$\Downarrow$$
$$\measuredangle C''A'''S \cong \measuredangle SAC = \omega$$

Posmatrajmo $\Delta C''A'''D$ i ΔACD. U njima su podudarni SUS pa su ta dva trougla podudarna $\Rightarrow CD \cong C''D \Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta CC''D$ je jkk sa osnovicom CC'' $\Rightarrow$ d simetrala CC''

Sad imamo
$$\left.\begin{array}{l} \gamma(S) = S \\ \gamma(A) = A''' \\ \gamma(C) = C'' \end{array}\right\} \text{ i } \left.\begin{array}{l} \sigma_d(S) = S \\ \sigma_d(A) = A''' \\ \sigma_d(C'') = C'' \end{array}\right\} \xRightarrow{A, S, C \text{ nekolinearni}} \sigma_d = \gamma \text{ tj. } \sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma_c = \sigma_d$$

q.e.d.

(#) Dokazati da je samo tačka S, $\{S\} = a \cap b$ fiksna tačka transformacije podudarnosti $\Pi = \mathcal{S}_a \circ \mathcal{S}_b$ $(a \not\equiv b)$.

Rj. postavka zadatka

a i b prave
$a \not\equiv b$
$\{S\} = a \cap b$
$\Pi = \mathcal{S}_a \circ \mathcal{S}_b$

$\Rightarrow$

$\Pi(S) = S$

$\forall (X \not\equiv S) \quad \Pi(X) = X' : X' \not\equiv X$

Napomena: Transformacija $\mathcal{S}_a \circ \mathcal{S}_b$ predstavlja rotaciju oko tačke S.

---

a) Provjerimo da li je tačka S fiksna tačka transformacije podudarnosti Π

$$\Pi(S) = \mathcal{S}_a \circ \mathcal{S}_b(S) = \mathcal{S}_a(\mathcal{S}_b(S)) \overset{S \in b}{=} \mathcal{S}_a(S) \overset{S \in a}{=} S \qquad \text{tj. } \Pi(S) = S$$

Tačka S jest fiksna tačka transformacije

b) Pokažimo jedinstvenost tačke S. Pretpostavimo suprotno, tj. pretpostavimo da pored tačke S postoji tačka $X \not\equiv S$ takva da $\Pi(X) = X$.

$a \cap b = \{S\}$ i $X \not\equiv S \Rightarrow X \notin a \cap b$ Razmotrimo dva slučaja:

1° $X \in b$

Tad $\mathcal{S}_b(X) = X$ i $\Pi(X) = \mathcal{S}_a(\mathcal{S}_b(X)) \overset{X \in b}{=} \mathcal{S}_a(X) \overset{\Pi(X)=X}{=} X \Rightarrow$

$\Rightarrow X \in a$ (kako je i $X \in b$) $\Rightarrow X \in a \cap b \Rightarrow X \equiv S$ # kontradikcija $(X \not\equiv S)$

2° $X \notin b$

Tad $\mathcal{S}_b(X) = X'$ i $X \not\equiv X'$ (b simetrala duži XX')

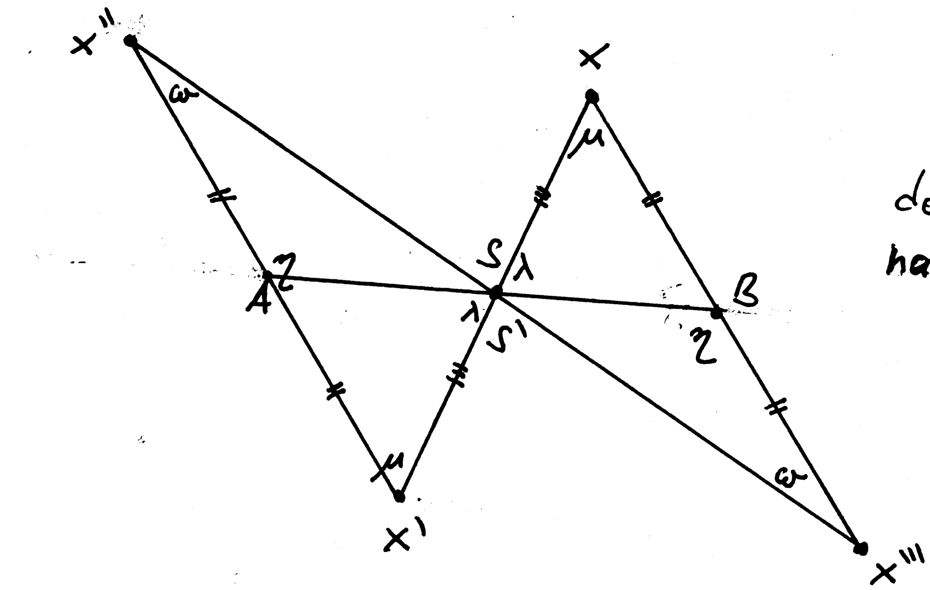
$\Pi(X) = \mathcal{S}_a(\mathcal{S}_b(X)) = \mathcal{S}_a(X') \overset{\Pi(X)=X}{=} X$ (a simetrala duži XX') $\Rightarrow$

$\Rightarrow a$ i b simetrale duži $XX' \Rightarrow a \equiv b$ # kontradikcija (sa $a \not\equiv b$)

Pretpostavka da tačka S nije jedina fiksna tačka transformacije podudarnosti Π nas dovodi u kontradikciju pa nije tačna.
Prema tome: S je jedina fiksna tačka transformacije Π q.e.d.

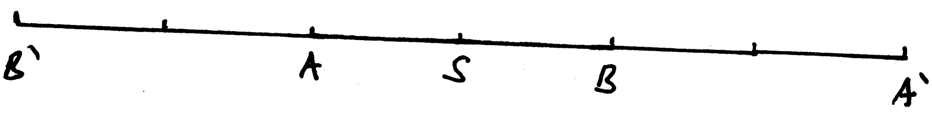
(#) Dokazati da je S sredina duži AB ako i samo ako vrijedi da je $\sigma_A \circ \sigma_S = \sigma_S \circ \sigma_B$.

Rj. „$\Rightarrow$": S sredina duži AB $\Rightarrow$ $\sigma_A \circ \sigma_S = \sigma_S \circ \sigma_B$.



Da bi dokazali jednakost
$$\sigma_A \circ \sigma_S = \sigma_S \circ \sigma_B$$
dovoljno ju je dokazati na tri nekolinearne tačke.
Posmatraćemo tačke A, B i $X \notin p(A,B)$.
S je sredina duži AB.

a) $(\sigma_A \circ \sigma_S)(A) = \sigma_A(\sigma_S(A)) = \sigma_A(B) = B'$ (A je sredina BB')
$(\sigma_S \circ \sigma_B)(A) = \sigma_S(\sigma_B(A)) = \sigma_S(A')$ (B je sredina AA')



$$\left.\begin{array}{l} BA \cong B'A \\ AB \cong A'B \\ AS \cong BS \end{array}\right\} B'S \cong A'S$$

$\Rightarrow \sigma_S(A') = B'$ Prema tome $(\sigma_A \circ \sigma_S)(A) = (\sigma_S \circ \sigma_B)(A)$

b)
$$\left.\begin{array}{l} (\sigma_A \circ \sigma_S)(B) = \sigma_A(\sigma_S(B)) = \sigma_A(A) = A \\ (\sigma_S \circ \sigma_B)(B) = \sigma_S(\sigma_B(B)) = \sigma_S(B) = A \end{array}\right\} \Rightarrow (\sigma_A \circ \sigma_S)(B) = (\sigma_S \circ \sigma_B)(B)$$

c) $(\sigma_A \circ \sigma_S)(X) = \sigma_A(\sigma_S(X)) = \sigma_A(X')$ ($SX \cong SX'$) (S sredina XX')
$\sigma_A(X') = X''$ ($AX' \cong AX''$) (A sredina $X'X''$)

$(\sigma_S \circ \sigma_B)(X) = \sigma_S(\sigma_B(X)) = \sigma_S(X''')$ (B sredina XX''') ($XB \cong X'''B$)

Trebamo pokazati da je S sredina $X''X'''$.

$$\left.\begin{array}{l} XS \cong X'S \\ \measuredangle XSB \cong \measuredangle X'SA = \lambda \\ AS \cong BS \end{array}\right\} \overset{SUS}{\Longrightarrow} \Delta XSB \cong \Delta ASX'$$
$$\Downarrow$$
$$AX' \cong BX \ ; \ \measuredangle SXB \cong \measuredangle SX'A = \mu$$

Primjetimo sad da je $x'x'' \cong xx'''$, i primjetimo da je

$\mu(x',x'') \parallel \mu(x,x''') \Rightarrow \sphericalangle Ax''S \cong \sphericalangle Bx'''S$ i $\sphericalangle x''AS \cong \sphericalangle x'''BS = \eta$

Ako sa S' označim presjek $\{S'\} = AB \cap x''x'''$ iz podudarnosti SUS (ugao ω, $Ax'' \cong Bx'''$, ugao η) slijedi da je $\Delta x''AS' \cong \Delta x'''BS'$

$$\Downarrow$$

$$AS' \cong BS'$$

$$\Downarrow$$

$$S \equiv S'$$

Konačno iz

$$\left.\begin{array}{l} x'x'' \cong xx''' \\ \sphericalangle x''x'S = \sphericalangle Sxx''' = \mu \\ xS \cong x'S \end{array}\right\} \overset{SUS}{\Longrightarrow} \Delta x''x'S \cong \Delta Sxx'''$$

$$\Downarrow$$

$$x''S \cong x'''S$$

(S je sredina duži $x''x'''$)

Znači $\sigma_S(x''') = x''$

Dobili smo $(\sigma_A \circ \sigma_S)(x) = (\sigma_S \circ \sigma_B)(x)$

Prema tome, iz a), b) i c) $\Rightarrow \sigma_A \circ \sigma_S = \sigma_S \circ \sigma_B$

q.e.d.

"$\Leftarrow$": $\sigma_A \circ \sigma_S = \sigma_S \circ \sigma_B \Rightarrow S$ sredina duži AB

$\sigma_A \circ \sigma_S = \sigma_S \circ \sigma_B \quad / \circ \sigma_S$ sa desne

$\sigma_A = \sigma_S \circ \sigma_B \circ \sigma_S$ Označimo sa $\gamma = \sigma_S \circ \sigma_B \circ \sigma_S$.

Nije teško pokazati da je γ involutivna transformacija čija je jedina fiksna tačka $\sigma_S(B)$ (OVE DVIJE TVRDNJE DOKAZATI ZA VJEŽBU).

Prema tome imamo ili a) γ je identitet ili

b) γ je osna simetrija

c) γ je centralna simetrija

a) i b) nije (ZAŠTO) $\Rightarrow \gamma$ je centralna simetrija sa centrom u tački $\sigma_S(B) \Rightarrow \sigma_A = \sigma_{\sigma_S(B)} \Rightarrow A = \sigma_S(B)$

$\Rightarrow S$ je sredina duži AB

q.e.d.